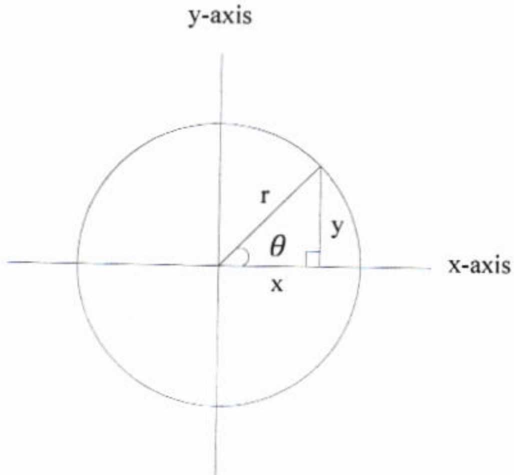
Trigonometric Functions: الدوال المثلثيه

Given a circle of radius (r) and P(x, y) is any point of the circle then:

- Sine of $\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$
- Cosine of $\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$
- Tangent of $\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$
- Secant of $\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$
- Cosecant of $\theta \Rightarrow \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{r}{y}$
- Cotangent of $\theta \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$



From the above triangle we can say:

$r^2 = x^2 + y^2$ (فيثاغورس)

But: $x = r\cos\theta$ & $y = r\sin\theta$

$\therefore r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$

$r^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$

$r^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Some of Trigonometric Identities:

- $\sin^2x + \cos^2x = 1$ .... (1)
- $\tan^2x + 1 = \sec^2x$ (ناتجة من قسمة المعادله (1) على $\cos^2x$)
- $1 + \cot^2x = \csc^2x$ (ناتجة من قسمة المعادله (1) على $\sin^2x$)
- $\sin2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos2x = \cos^2x - \sin^2x$
- $\because \cos2x = \cos^2x - \sin^2x$

  $\cos2x = (1 - \sin^2x) - \sin^2x$

  $\cos2x = 1 - 2\sin^2x$

  $2\sin^2x = 1 - \cos2x \Rightarrow \therefore \sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos2x)$

1

Prove that: $\sin^2 x = \frac{1}{2}\ (1 - \cos 2x)$

Right side $= \frac{1}{2}\ (1 - \cos 2x)$

$= \frac{1}{2}\ [1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)]$

$= \frac{1}{2}\ [1 - (1 - \sin^2 x - \sin^2 x)$

$= \frac{1}{2}\ [1 - 1 + 2\sin^2 x]$

$= \sin^2 x =$ left side

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}\ (1 + \cos 2x)$ ------------------ Prove that
- $\sin(x + y) = \sin x \cos x + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos x - \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
- $\sin A . \sin B = \frac{1}{2}\ [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$
- $\cos A . \cos B = \frac{1}{2}\ [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$
- $\sin A . \cos B = \frac{1}{2}\ [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$

❖ قيمة الـ π مع الزوايا تساوي (180) بينما مع الأرقام تساوي (3.14)

❖ اشارة الدوال المثلثيه: كل جار ظالم جتا مصيبه

الربع الثاني (sin) +	الربع الأول (sin, cos, tan) +
الربع الثالث (tan) +	الربع الرابع (cos) +

2

❖ اضافة أو طرح أي عدد من الدورات لايغير من قيمة الزاويه (2π دوره واحده & 4π دورتان & 6π ثلاث دورات وهكذا....).

❖ $90 = \frac{\pi}{2}$ & $180 = \pi$ & $270 = \frac{3\pi}{2}$ & $360 = 2\pi$

➢ الزوايا المكمله (π & 2π): موقع الربع يحدد الأشاره وتبقى الداله نفسها.

الربع الثالث
$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi+\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) &= +\tan\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الثاني
$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi-\theta) &= +\sin\theta \\ \cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الرابع
$$\left.\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \\ \cos(-\theta) &= +\cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الرابع
$$\left.\begin{aligned} \sin(2\pi-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(2\pi-\theta) &= +\cos\theta \\ \tan(2\pi-\theta) &= -\tan\theta \end{aligned}\right\}$$

➢ الزوايا المتممه ($\frac{\pi}{2}$ & $\frac{3\pi}{2}$): موقع الربع يحدد الأشاره وتقلب الداله الى متممتها. مثلاً ال sin في الربع الأول تكون موجبه ثم تقلب الى cos .

الربع الثاني
$$\left.\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{2}+\theta) &= +\cos\theta \\ \cos(\tfrac{\pi}{2}+\theta) &= -\sin\theta \\ \tan(\tfrac{\pi}{2}+\theta) &= -\cot\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الأول
$$\left.\begin{aligned} \sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta) &= +\cos\theta \\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta) &= +\sin\theta \\ \tan(\tfrac{\pi}{2}-\theta) &= +\cot\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الرابع
$$\left.\begin{aligned} \sin(\tfrac{3\pi}{2}+\theta) &= -\cos\theta \\ \cos(\tfrac{3\pi}{2}+\theta) &= +\sin\theta \\ \tan(\tfrac{3\pi}{2}+\theta) &= -\cot\theta \end{aligned}\right\}$$

الربع الثالث
$$\left.\begin{aligned} \sin(\tfrac{3\pi}{2}-\theta) &= -\cos\theta \\ \cos(\tfrac{3\pi}{2}-\theta) &= -\sin\theta \\ \tan(\tfrac{3\pi}{2}-\theta) &= +\cot\theta \end{aligned}\right\}$$

Example 1: **sin10x**

$= 2\sin 5x \cos 5x$

Example 2: **cos4x**

$= \cos^2 2x - \sin^2 sx$

Example 3: $\mathbf{\cos^2 7x}$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 14x)$

Example 4: $\mathbf{\sin^2 15}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 30)$

Example 5: **cos330**

$= \cos(270 + 60)$

$= + \sin 60$

Example 6: **cos330**

$= \cos(360 - 30)$

$= + \cos 30$

Example 7: **sin150**

$= \sin(180 - 30)$

$= + \sin 30$

Functions: الدوال

Introduction: المقدمة

Rules for Inequalities:

If a, b, and c are real numbers, then:

1) $a < b \rightarrow a + c < b + c$
2) $a < b \rightarrow a - c < b - c$
3) $a < b \text{ and } c > 0 \rightarrow ac < bc$
4) $a < b \text{ and } c < 0 \rightarrow bc < ac$

Special case: $a < b \rightarrow -b < -a$

5) $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6) If a and b are both positive or both negative, then $a < b \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Example: Solve the following:

a) $2x - 1 < x + 3$

$2x - x < 1 + 3$

$x < 4$

b) $-\frac{x}{3} < 2x + 1$

$-x < 6x + 3$

$0 < 7x + 3$

$-\frac{3}{7} < x$

Absolute Value Properties

1) $|-a| = |a|$
2) $|ab| = |a||b|$
3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4) $|a + b| \leq |a| + |b|$

5

Absolute Values and Intervals

If a is any positive number, then:

1) $|x| = a \quad if\ and\ only\ if\ x = \pm a$
2) $|x| < a \quad if\ and\ only\ if - a < x < a$
3) $|x| \leq a \quad if\ and\ only\ if - a \leq x \leq a$
4) $|x| > a \quad if\ and\ only\ if\ x > a\ or\ x < -a$
5) $|x| \geq a \quad if\ and\ only\ if\ x \geq a\ or\ x \leq -a$

Example: Solve the following:

a) $|2x - 3| = 7$

$2x - 3 = 7 \qquad\qquad 2x - 3 = -7$

$2x = 10 \qquad\qquad 2x = -4$

$x = 5 \qquad\qquad x = -2$

$The\ solution\ is\ x = 5\ and\ x = -2$

b) $|5 - \frac{2}{x}| < 1$

$$-1 < 5 - \frac{2}{x} < 1$$

$$-6 < -\frac{2}{x} < -4 \qquad\qquad (multiply\ by - \frac{1}{2})$$

$$3 > \frac{1}{x} > 2 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

c) $|2x - 3| \leq 1$

$-1 \leq 2x - 3 \leq 1$

$2 \leq 2x \leq 4 \qquad\qquad (divide\ by\ 2)$

$1 \leq x \leq 2$

d) $|2x - 3| \geq 1$

$2x - 3 \geq 1 \qquad or \qquad 2x - 3 \leq -1$

$2x \geq 4 \qquad or \qquad 2x \leq 2$

$x \geq 2 \qquad or \qquad x \leq 1$

$The\ solution\ is\ (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

Functions: الدوال

The Domains and Ranges:

Domain: هو مجال القيم الحقيقيه لـ (x) التي تأخذ قيم حقيقيه لـ (y).

وصيغة المعادله تكون: Equation $\Rightarrow y = f(x)$

Range: هو مجال القيم الحقيقيه لـ (y) التي تأخذ قيم حقيقيه لـ (x).

وصيغة المعادله تكون: Equation $\Rightarrow x = f(y)$

Domain and Range are divided to Bounded & Infinite Intervals:

	Bounded Intervals الفترات المحدده		Infinite Intervals الفترات الغير محدده
1	$a < x < b$ $a \, (\longleftrightarrow) \, b \Rightarrow$ open interval $D_f, R_f : a < x < b$ or (a, b)	1	$-\infty < x < \infty$ $-\infty \longleftarrow 0 \longrightarrow \infty$ $D_f, R_f : -\infty < x < \infty$ or $(-\infty, \infty)$ or R (all real numbers)
2	$a \leq x \leq b$ $a \, [\longleftrightarrow] \, b \Rightarrow$ close interval $D_f, R_f : a \leq x \leq b$ or $[a, b]$	2	$a < x$ $a \, (\longrightarrow \infty$ $D_f, R_f : x > a$ or (a, ∞)
3	$a \leq x < b$ $a \, [\longleftrightarrow) \, b \Rightarrow$ half-open interval $D_f, R_f : a \leq x < b$ or $[a, b)$	3	$a \leq x$ $a \, [\longrightarrow \infty$ $D_f, R_f : x \geq a$ or $[a, \infty)$
4	$a < x \leq b$ $a \, (\longleftrightarrow] \, b \Rightarrow$ half-open interval $D_f, R_f : a < x \leq b$ or $(a, b]$	4	$x < b$ $-\infty \longleftarrow) \, b$ $D_f, R_f : x < b$ or $(-\infty, b)$
		5	$x \leq b$ $-\infty \longleftarrow] \, b$ $D_f, R_f : x \leq b$ or $(-\infty, b]$

Example 1: $f(x) = x + 15$ $\qquad$ $f(x) = y$

D_F: R

$y = x + 15 \Rightarrow x = y - 15$

R_F: R

Example 2: $y = \frac{3}{x-2}$ $\qquad$ المقام $\neq 0$

الشرط $\Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

D_F: R / {2}

$y = \dfrac{3}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = 3$

$yx = 3 + 2y \Rightarrow x = \dfrac{3+2y}{y}$

R_F: R / {0}

Example 3: $y = \sqrt{x-1}$ $\qquad$ لايجوز أن تكون القيمة سالبة تحت الجذر (قيمه خيالية)

الشرط $\Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

D_F: x: $x \geq 1$ or $[1, \infty)$

$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1$

R_F: y: $y \geq 0$ or $[0, \infty)$ نأخذ القيم الموجبة والصفر فقط لأن الدالة الأصلية دالة جذرية

Example 4: $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

الشرط $\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

D_F: x: $x > 1$ or $(1, \infty)$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x-1}$

$y^2 x - y^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow x = 1 + \dfrac{1}{y^2}$

R_F: y: $y > 0$ نأخذ القيم الموجبة فقط لأن الدالة الأصلية دالة جذرية وكسرية