الفصل السابع/ الحركة الموجية والجسيمات

المقدمة:-

أن الإشعاع الكهرومغناطيسي الذي يشمل الضوء المرئي والأشعة دون الحمراء وفوق البنفسجية والأشعة السينية يعتبر حركات موجية حسبما دلت عليها تجارب التداخل الضوئي. أن تجارب تداخل الضوء المتمثلة بالتداخل الاتلافي والتداخل البناء تعتبر أداة اختبار للكشف عن الحركات الموجية حيث تتطلب وجود موجتين في مكان واحد بنفس الزمن. وعلى العكس فأن النتائج المستخلصة من التجارب الجارية على امتصاص الأشعة السينية وإشعاع الجسم الأسود والتأثير الكهروضوئي تدل على أن الإشعاع هو سيل من الجسيمات يطلق عليها الفوتونات تمتص الواحد تلو الأخرى في أزمنة متعاقبة. ويمكن اعتبار الضوء في بعض التجارب كأنه موجات وفي تجارب أخرى جسيمات. وعلى الرغم من ذلك يمكن تقسيم هذه التجارب إلى شقين، أما تجارب الانتشار الموجي التي لها الخاصية الموجية والتي تستند في تفسيرها على تعيين الفرق بين طولي مسار موجتين وأما تجارب التفاعل الضوئي التي لها خاصة الجسيمات حيث يتفاعل الإشعاع مع المادة وينتج من ذلك الامتصاص أو التشتيت. أن الفكر الازدواجية للضوء لم تتقبل بسهولة لما تتضمنه من تناقص في تفسير هاتين الحالتين. إذ تتميز الموجة بترددها (γ) وطول موجتها (λ) وسرعتها (W) وسعتها (A) وشدتها (I) على أن هذه المحددات ليست جميعها مستقلة عن بعضها، فمثلاً ترتبط السرعة وطول الموجة والتردد بالعلاقة ($W=\gamma\lambda$). وفي الحقيقة أن الموجة الجيبية ذات الطول الموجي المعين تتكون من عدد كبير من الموجات لذا فأنها تنتشر وتشغل حيزاً واسعاً في الفضاء. وعلى العكس فأن الجسيمة التي تتميز بكتلتها (m) وزخمها (P) وطاقتها (E) فأنها تشغل حيزاً محدداً في الفراغ، لذا فأن حجمها لابد أن يكون صغيراً جداً. ومن هنا يتضح لنا أوجه التناقض في هاتين الفكرتين وهما أن الضوء موجة تنتشر وتشغل حيزاً واسعاً في الفضاء وهو أيضا جسيمة صغير جداً تشغل نقطة في الفضاء. وعلى كل حال ينبغي لنا أن نقبل هاتين الفكرتين المتناقضتين من اجل أن نعلل جميع النتائج التجريبية الجارية على الضوء (نستخدم كلمة ضوء لتعني جميع ما يتضمنه الطيف الكهروضوئي). إذ لابد أن هناك ارتباط بين الموجة والجسيمة (أو الفوتون) فقد ربط بلانك بين طاقة الفوتون (E) وتردد الموجة (γ) بالعلاقة:-

$$E=h\gamma \ldots..(1)$$

وكذلك ربط كومبتن بين زخم الفوتون وطول الموجة بالعلاقة التالية:-

$$P=\frac{h\gamma}{C}=\frac{h}{\lambda} \ldots\ldots.(2)$$

وهذا يدل على أن زخم الفوتون (P) يمكن تعينه إذا لم طول الموجة (λ) إضافة إلى ذلك يمكن تعيين الشدة الموجية من عدد الفوتونات الساقطة على وحدة المساحات ومن هذا يتضح لنا أن خاصية الجسيمة للضوء يمكن إيجادها في الخاصية الموجية.

فرضية دي برولي:-

لقد طورت فكرة الازدواجية في طبيعة الضوء والتي فرضتها النتائج التجريبية لتشمل المادة أيضا كما فرضها دي برولي (Debroglie) عام (1924). أحس دي برولي بأن الطبيعة متناسقة وأن الخاصية الازدواجية في طبيعة الضوء يجب أن يقابلها ازدواجية في طبيعة المادة. وكانت حجته أنه إذا كان الضوء يتصف كموجة في ظاهر ما وكجسيمة في ظاهرة أخرى فعند ذلك الجسيمات الأخرى مثل الالكترونات والبروتونات والنيترونات والذرات والجزيئات ينبغي لها أن تتصف بازدواجية الأمواج في بعض الأحيان. لثبيت هذه الخاصية الموجية اقترح دي برولي بأن العلاقة بين الزخم وطول الموجة لفوتون هما علاقة عامة تطبيق على الفوتونات والجسيمات المادية على السواء وهي:-

$$\lambda=\frac{h}{P} \ldots.(3)$$

وبما أن الزخم لجسيمة مادية هو حاصل ضرب كتلتها (m) في سرعتها (υ) فأن طول موجة دي برولي تكون:-

$$\lambda = \frac{h}{m.\upsilon} \ldots.(4)$$ طول موجة دي برولي

تمثل المعادلة (4) العلاقة بين طول الموجة (λ) المرافقة لجسيم كتلته (m) وسرعته (υ) والتي قام بتحليلها تجريبياً كل من دافسن وكيرمر في (1928) وتومسن عام (1928).

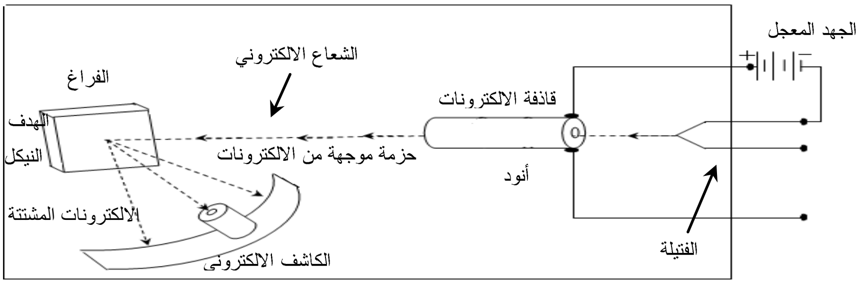
أن هذه الأمواج الدي برولية ليست بموجات كهرومغناطيسية ولكنها نوع جديد للأمواج والتي يطلق عليها الأمواج المادية أو الأمواج الدليلية، وأن كلمة دليل تعني تلك الموجات التي تدل أو ترشد الجسيمة. لقد نشر ديبرولي فرضية وكانت غير مدعمة بأي برهان تجريبي وإنما إيمانه العميق بأن الطبيعة يجب أن تكون متناسقة هو الذي دفعه إلى ذلك. عند هذا الحد علينا أن ننظر بعين الاعتبار الحقيقة التالية، والتي تقول أن طول الموجة ليس كافياً لتعين الموجة بصورة تامة إذا أنه يجب معرفة التردد أو السرعة أيضا. ومن الجدير بالذكر من العلاقة (4) يتبين لنا أنه كلما زاد زخم الجسيم قصر طول موجته. في المعادلة (4)(m_o): تمثل الكتلة السكونية عند السرع الواطئة جداً (العادية) بينما، (m): الكتلة النسبية عند السرع التي تقترب من سرعة الضوء.

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \ldots..(5)$$ الكتلة النسبية

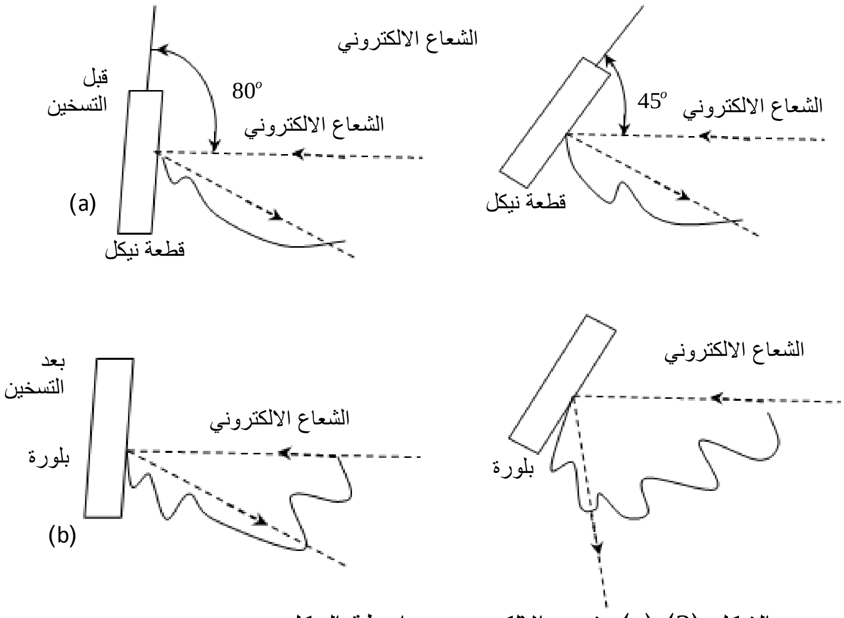
أن المعادلة (5) برهنت علمياً بواسطة تجارب تتضمن حيود الكترونات سريعة بواسطة بلورات، كحيود الأشعة السينية.

حيود الالكترونات (تجربة دافسن وكيرمر):-

وفي عام (1927) كان دافسن وكيرمر (Davisson and Germer) يدرسان تشتيت الالكترونات بواسطة النيكل. وقد اتبعا في أسلوب تجربتهما نفس المتبع في تشتيت رذرفورد لجسيمات ألفا وتشتت كومبتن للأشعة السينية. أسقطا الحزمة الإلكترونية المشتتة في اتجاهات مختلفة. وبينما هما في عملهما إذ أنفجر جهاز تفرغ الهواء، وكان عليهما أن يصلحاه، ومن حسن الصدف كانت قطعة النيكل ساخنة جداً عند انفجار جهاز التفريغ بحيث أدى دخول الهواء فجاءه إلى تأكسدها بحيث اكتسبت طبقة كثيفة من الاوكسيد. ولأجل إزالة هذا الأوكسيد سخنا قطعة النيكل بواسطة فرن إلى درجة حرارة عالية ومن ثم أعادا بناء تجربتهما، وحصلا على نتائج تختلف عن النتائج التي حصلا عليها في بداية التجربة. فبينما كانت شدة الحزمة الالكترونية المشتتة تقل بصورة مستمرة كلما كبرت زاوية التشتت وجدا بعد إصلاح الجهاز أن شدة الحزمة الإلكترونية المشتتة ذات نتوآت لها نهايات عظمى وسفلى وهذه خاصية مميزة للحيود الالكتروني. و للتأكد من ذلك استعملا نفس الأسلوب المتبع في حيود الأشعة السينية بواسطة بلورة واستخلصا منها طول الموجة المصاحبة للالكترونات ووجدا أن طول هذه الموجة يتفق مع فرضية ديبرولي. وتفسير ذلك أنه أثناء عملية التسخين لتنظيف كتلة النيكل من الأوكسجين تحولت إلى بلورة منفردة ولهذا السبب فأن حزمة الالكترونات الساقطة تعاني حيوداً الكترونياً كما هو الحال في حيود الأشعة السينية في تجربة لاوي (Laue). هذه التجربة أكدت صحة فرضية ديبرولي وأثبتت أن الجسيمات المادية لها خاصية موجية. الشكل (1) هو جهاز لتجربة دافسن وكيرمر، ففي اليمين قاذفة الكترونية تجهز حزمة موجهة من الالكترونات يمكن معرفة طاقتها من الجهد المعجل. هذه الالكترونات تتشتت عند اصطدامها بهدف النيكل الذي يمكن الدوران حول محور عمودي على مستوى الصفيحة. الكاشف الالكتروني القادمة من الهدف في أي اتجاه يقع ضمن مستوى الشكل.



الشكل(1) رسم تخطيطي لجهاز حيود الالكترونات لدافسن وكيرمر.



الشكل (2) (a) تشتت الالكتروني بواسطة النيكل.
(b) حيود الالكترونات بواسطة بلورة النيكل المنفردة.

النتائج التي تم الحصول عليها في اتجاهين معينين لهدف النيكل كلاهما قبل وبعد عملية التسخين طول موجة الالكترونات المستنبطة تجريبيا تتفق جيداً مع طول موجة ديبرولي التي يمكن حسابها من معرفة الجهد (V). بما أن دافسن وكيرمر استخدما فرق الجهد المعجل للالكترونات مقداره (75ev) أمكنهم عندئذ إيجاد سرعة انطلاق الالكترونات باستخدام العلاقة الكلاسيكية:-

$$T = e \times V \; \ldots .(8)$$

$$\frac{m_e\, \upsilon^2}{2} = eV \;\; \leftarrow \text{جهد}$$

$$\because \upsilon^2 = \frac{2eV}{m_e}$$

وبالتعويض في علاقة دي برولي ينتج أن،

$$\lambda = \frac{h}{m_e\, V} = \frac{h}{\sqrt{2eVm_e}} \; \ldots ..(9)$$

*لقد زادت البراهين العلمية لإثبات فرضية ديبرولي، ففي ألمانيا أجرى ايسترمان و اشتيرن (Estermann and Stern) تجربة انعكاس ذرات الهليوم بواسطة بلورة فلوريد الليثيوم وفي الولايات المتحدة قام جرنسون (Jehnson) بحيود الهيدروجين ببلورة مماثلة.

*إن التأثير الكهروضوئي يبين أن الموجات لها صفة مميزة للجسيمة وفرضية ديبرولي تظهر أن الجسيمات لها خاصية موجية ولكنه يجب أن نتذكر دائماً لا يمكن للجسيمات أو الموجات أن تتصف بكلى المظهرين في أن واحد.

س/ أن حزمة الالكترونات التي طاقتها (54ev) والتي تصنع زاوية انعكاس (50) درجة على القياسات التي قام بها دافسن وكيرمر وقيمة المسافة بين الذرات على سطح بلورة النيكل (D) مقدارها ($2.15\ A^o$) لمعرفة ما أذا كانت هناك خاصية موجبة للالكترونات أم. فهل جاءت نتائج هذه التجربة موافقة لفرضية دي برولي. علماً بأن (n=1 رتبه الحيود)؟

من معادلة براك يمكن الحصول على طول الموجة المرافقة للالكترونات التي تنعكس من مستويات ذرات بلورة النيكل المرتبة بمسافات متساوية بشكل التالي:

$$n\,\lambda = D\,Sin\theta$$

n=1, $\theta = 50^o$, D= 2.15 A^o

$$\lambda = 2.15\ A^o\ \ Sin\ 50^o$$

$$\lambda = 1.646 \cong 1.65 A^o$$

يمكن مقارنة طول الموجة هذا مع مقداره الناتج من معادلة دي برولي التالية:-

أو $\lambda = \dfrac{h}{m_o\ \upsilon}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_o\ eV}}$$

$$\lambda = \frac{6.63\times10^{-34}\ J.\sec}{\sqrt{2\times9.1\times10^{31} kg\times1.6\times10^{-19} J/\cancel{e}V\times54\cancel{e}V}}$$

$\lambda = 1.66\ \ A^o$ وهكذا جاءت نتائج تجربة دافيس وكيرمر موافقة لفرضية دي برولي.

دالة الموجة:- (*Wave Function*)

* أن دالة الموجة (*Wave Function*) التي يرمزلها بـ (ψ) وهي الدالة التي تصف الحالة الحركية لجسيم متحرك (طاقته، زحمه، ....الخ) وتمثل الموجه المادية المرابطة للجسيم وذلك اعتماداً على فرضية دي برولي التي تنص على أن كل جسيم متحرك ترافقه موجة مادية طولها (λ) وترتبط بزخم الجسيم بالعلاقة (4).

* توصف الدالة الموجبة عادة برمز (ψ) وهو حرف إغريقي يلفظ بساي وتمثل سعة الموجة المادية المصاحبة للجسيم المتحرك أن اختلاف الحالات الحركية للجسيم يعني وجود دوال موجية مختلفة التي تصف تلك الحالات.

* أن قيمة دالة الموجية التابعة لجسيم متحرك، عند الموقع (x ،y ، Z) وفي اللحظة (t) تتعلق باحتمال وجود الجسيم في ذلك المكان والزمان. ومع هذا فأن ψ نفسها ليس لها معنى فيزياوي مباشر.

* هناك سبب بسيط يعلل لماذا لا يمكن قياس(ψ) تجريبياً، فالاحتمالية (P) تمثل بأن شيئاً في موقع معين عند لحظة معينة يمكن أن يأخذ القيمة بين الصفر(0) الذي يمثل عدم وجود الجسيم قطعياً، و(1) الذي يكون عنده وجود الجسيم حتمياُ. وتستعمل كثافة الاحتمالية ($|\psi|^2$) لتحديد وجود الجسيم.

سرعة موجة دي برولي (*De Broglie Wave Velocity*)

ما سرعة انتشار موجة دي برولي؟ لما كان جسيم متحرك ترافقه موجة، فمن المعقول أن سرعة الموجة هذه تتحدد بسرعة الجسم. لو كانت سرعة موجة دي برولي (W)، فأن

سرعة موجة ديبرولي $W = \gamma\lambda \ldots.(1)$

حيث λ : هي طول موجة ديبرولي.

γ : تردد موجة ديبرولي.

$$\because \lambda = \frac{h}{m\upsilon} \ldots.(2)$$

حيث (m): كتلة الجسيم، υ : سرعة الجسيم.

في حين أن التردد لا يتحدد بالمعادلة الكمية:-

$$E = h.\gamma \ldots..(3)$$

حيث أن E: طاقة المواجة التي ترافق الجسيم المتحرك وهي نفسها الطاقة الكلية للجسيم.

$$\text{OR:} \quad \gamma = E / h \,.....(4)$$

وبما أن $E = m \times C^2 ......(5)$

نعوض (5) في (4).

(6) نعوض (5) في (4)..... $\gamma = m \times \dfrac{C^2}{h}$

نعوض (2) و (6) في (1).

$$W = \frac{mC^2}{\hbar} \times \frac{\hbar}{m\upsilon}$$

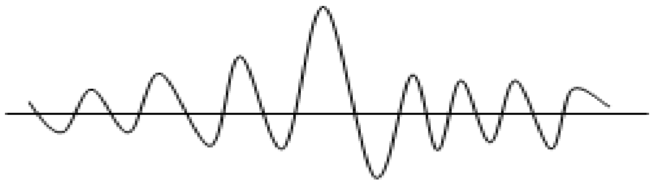
سرعة موجة دي برولي $W = \dfrac{C^2}{\upsilon} ....(7)$

* لما كانت سرعة الجسيمات المادية (υ) هي دائماً اقل من سرعة الضوء (C)، فسرعة دي برولي المصاحبة له هي دائماً أكبر من (C) وفق المعادلة (7). لا يوجد هناك تعارض بين هذه الحقيقة وفرضية نظرية النسبية التي تؤكد على استحالة انتقال أية طاقة بسرعة تزيد على سرعة الضوء.

أن حقيقة كون سرعة الموجة اكبر من سرعة الجسيم لا تعني أن موجات دي برولي تبتعد عن الجسيم. وبدلاً من ذلك يمكننا تصور الجسيم داخل حزمة موجية مع انتقال الحزمة ككل بسرعة الجسيم υ، بينما تنتقل الموجات المكونة للحزمة أو الزمرة بسرعة الموجة W وتختلف سرعة الموجة لموجات دي برولي عن سرعة الضوء بمظهر مهم واحد، وهو انه حتى في الفضاء الخالي تكون سرعة الموجة دالة لطولها.

سرعة الموجة وسرعة مجموعة الأمواج أو الزمرة (Wave and group Velocity).

* أن موجة جسيم متحرك تكون على شكل رزمة موجية أو مجموعة موجية (Wave Packet)التي تضم عدداً من الموجات مختلفة السعات لذلك فأن احتمالية وجود الجسيم تكون متمركزة في حيز محدود.

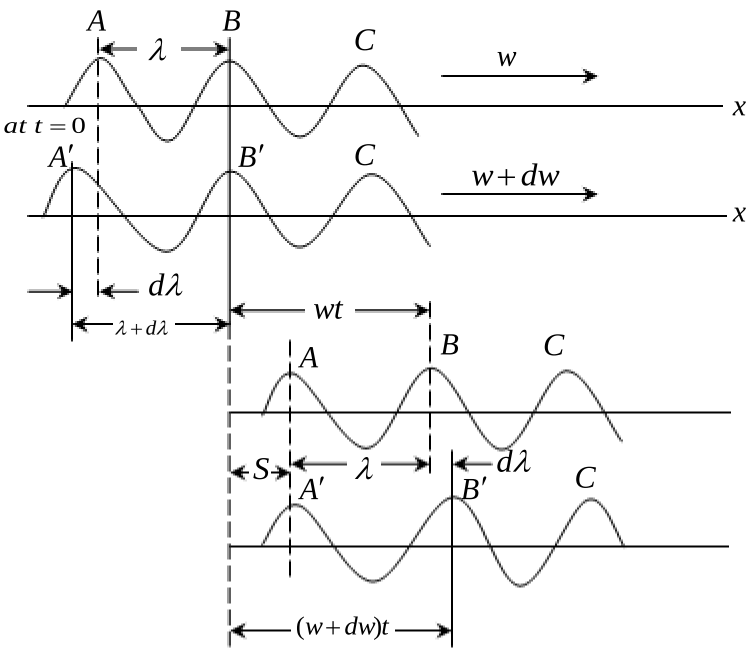


الشكل (3) رزمة موجية

* وأن توليد رزمة الموجات يصاحبه تكون الضربات الصوتية (عند توليد موجتين صوتيتين بنفس السعة ولكن بتردد مختلف جزيئاً).
وأن تردد الصوت المسموع يساوي معدل تردد الموجتين، في حين تزداد شدة الصوت وتنقص بصورة دورية على شكل ضربات. وأن عدد الضربات يساوي الفرق بين تردد الموجتين الأصليتين.

س/ برهن بأن سرعة الزمرة (سرعة مجموعة الأمواج) هي نفس سرعة الموجة.

تعتمد سرعة الموجة w على طول موجتها عند انتشارها في وسط مفرق وتنتشر الموجات التي أطوال موجاتها مختلفة فيه كزمرة سرعتها u وتختلف عن w ولاشتقاق العلاقة بين هاتين السرعتين نفرض أن هناك فرقاً ضئيلاً بين طولي موجتين ينتشران معاً في وسط مفرق كما هو مبين في الشكل (4). وفيه طول الموجة العلوية ABC هو λ وسرعتها الموجية هي w. بينما طول الموجة السفلية ABC هو $\lambda + d\lambda$ وتتحرك بسرعة w + dw وبنفس اتجاه حركة الموجة الأولى.



الشكل (4).

ولو أن موجتين قد رسمتا منفصلتين ولكنهما ينتقلان في نفس الفضاء. لنختار لحظة تكون فيها أي قمتين B و'B متطابقتين في t=0 فسعة الموجة الناتجة من تداخل هاتين الموجتين ستكون في نهايتها العظمى في هذا الموضع. وبعد مرور زمن معين مثل t، ستكون 'B قد سبقت B بمقدار $d\lambda$ بحيث تنطبق 'A على A. وبذلك تكون سعة النهاية العظمى قد أزيحت في هذه الفترة الزمنية إلى الموضع الذي يتطابق فيه A و'A. لنفرض أن هذه المسافة هي s ولنعرف سرعة الزمرة u بالمعادلة التالية:-

$$u=\frac{s}{t}\quad\ldots.(8)$$

ومن الشكل (4) يمكننا استنتاج

$$s=wt-\lambda$$

ومن (8) نحصل على:

$$u=w-\frac{\lambda}{t}\quad\ldots.(9)$$

ويمكن أيضا، أن نرى من الشكل أن المسافة $d\lambda$ التي تحركتها 'B من B في نفس الزمن t هي:

$$d\lambda=(w+dw)t-wt=tdw$$

ومنها نحصل على

$$t=\frac{d\lambda}{dw}$$

وبتعويض هذه القيمة للزمن t في المعادلة (9) نحصل على:

$$u=w-\lambda\frac{dw}{d\lambda}\quad\ldots.(10)$$

تبين المعادلة (10) العلاقة بين سرعة لزمرة من الموجات وسرعة الموجة w لكل من مكونات الزمرة من الموجات. فأن لم يكن هناك استطارة، كانتقال الضوء في الفراغ، فعندئذ.

$$\frac{dw}{d\lambda}\quad \text{و}$$

$$u=w$$

سرعة الزمرة أو مجموعة الأمواج وسرعة الجسيم:

يمكن البرهنة بسهولة، أن سرعة الزمرة لموجات دي برولي هي نفس سرعة الجسيم على النحو التالي بينا أن سرعة الموجة لموجات دي برولي هي:

$$w = c\ (1 + \frac{m^2\ c^2}{h^2}\lambda^2)^{1/2} \ldots.(11)$$

وألان:

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{C}{[1+(M^2\ c^2\ h^2)\lambda^2]}\frac{m^2\ c^2}{h^2}$$

وعند تعويض قيمة $\frac{dw}{d\lambda}$ ، في المعادلة (9) وباستخدام المعادلة التالية:

$$w = c\ (1 + \frac{m_o^2\ c^2}{h^2}\lambda^2)^{1/2}$$

نحصل على:

$$u = \frac{c^2}{w}$$

ولكن سبق وأن رأينا، أن

$$\upsilon = \frac{c^2}{w}$$

أذن $u = \upsilon$

وهذا يعني أن سرعة الزمرة لموجات دي برولي هي نفس سرعة الجسيم وبعبارة اخرى موجات دي برولي هي نفس سرعة الجسيم وبعبارة أخرى موجات دي برولي تسير مع الجسيم.

الصفات المميزة لموجة ديبرولي (*Characteristics of the De Broglie Waves*):

a- أن موجة جسيم متحرك والتي تأخذ شكل رزمة موجية (Wave Packet) أو مجموعة موجية (Wave Group) تضم عدداً من الموجات المختلفة السعات. وأن احتمالية وجود الجسيمة متمركزة في حيز محدود. وسنجد لأحقاً كيف أن شكل الموجة وسعتها تعطينا دلالة احتمالية وجود الجسيم في موقع وزمن معينين.

b- أن طول الموجي لموجة ديبرولي يعتمد على كتلة الجسيم حيث أن ($\lambda = \frac{h}{mV}$). إي أن الطول الموجي يتناسب عكسياً مع كتلة الجسم. لذلك فالالكترونات والبروتونات والنيوترونات التي تتحرك بنفس السرعة سوف تمتلك أطوال موجية مختلفة.

c- من الممكن أن تكون سرعة مجموعة الأمواج اكبر أو أصغر من سرعة موجة منفردة. وقد لاحظنا في المعادلة أن سرعة الموجة (W) تساوي ($\frac{C^2}{\upsilon}$) أي أكبر من سرعة الجسيم (υ) وسرعة الضوء (C) ذلك لأن (C) > (υ)، غير أن سرعة مجموعة أمواج ديبرولي لجسيم متحرك تساوي نفس سرعة الجسيم.

واجب:

س1/ جد طول موجة ديبرولي بروتون طاقته (1Mev)؟

س2/ جد طول ديبرولي لإلكترون سرعته (10^8 m/sec).

س3/ اشتق معادلة توضح العلاقة بين طول موجة ديبرولي بوحدة الانكستروم (A^o) للا $\bar{e}$ وفرق الجهد المعجل (V) (بوحدة فولت).

س4/ بين بالطريقة النسبية أن الطول الموجة المصاحبة للجسم عندما تكون كتلته في حالة السكون تساوي (m_o) وسرعته تساوي (υ) هي، $\lambda = \dfrac{h\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{1/2}}{m_o\upsilon}$.

س5/ ما هو طول موجة ديبرولي للموجة المصاحبة مع إلكترون منطلق من السكون، تعجل بتأثير فرق جهد مقداره 1- (100 volt)، 2- (800 volt)؟

س6/ احسب طول موجة ديبرولي للحالات التالية مع إهمال النظرية النسبية:-

a- بروتون ينطلق بسرعة (1/10) من سرعة الضوء.

b- جسيمة ألفا تم تعجيله بتسليط فرق للجهد يصل إلى (20,000) فولت.

c- نيترون بطاقة قدرها واحد إلكترون فولت.

d- إلكترون تم تعجيله بـ (5,000) فولت.

س7/ نيوترونات في حالة توازن حراري مع مادة عند حرارة الغرفة (300k) لها معدل طاقة حوالي ($\dfrac{1ev}{25}$) (هذه النيرترونات تدعى أحيانا نيترونات حرارية). جد طول موجة ديبرولي لهذه النيوترونات. جد طول موجة ديبرولي لجسيم متحرك وفقاً للخطوات التالية المكافئة لطريقة ديبرولي الأصلية:-

تصور جسيماً كتلته السكونية (m_o) له تردد خاص يتحدد بالمعادلة ($h\gamma_o = m_oC^2$) يتحرك هذا الجسيم بسرعة (υ) بالنسبة لمشاهد. أثبت باستخدامك النظرية النسبية الخاصة، أن المشاهد يرى موجة تنتشر بسرعة ($W = \dfrac{C^2}{\upsilon}$)، وطول موجي ($\dfrac{h}{m\upsilon}$)، حيث أن $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon^2}{C^2}\right)}}$.

س8/ المسافة بين مستويات براك المتجاورة في بلورة الكالسيوم تساوي (3×10^{-8}cm) ما أصغر زاوية بين هذه المستويات وحزمة أشعة سينية ساقطة طولها الموجي ($0.3A^o$) والتي يمكن التحسس عندها بالأشعة السينية المتشتتة؟

س9/ ما طاقة فوتون إذا كان زخمه يساوي زخم بروتون طاقته (10 Mev)؟

س10/ اشتق معادلة علاقة موجة ديبرولي لجسيم بدلالة طاقته الحركية (T) وطاقته السكونية ($m_o\ C^2$) وإذا كانت ($T \gg m_o\ C^2$)، قارن بين طول موجة ديبرولي للجسيم وطول موجة فوتون بنفس الطاقة.

س11/ إذا كانت سرعة الموجات السطحية لسائل تساوي $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda\rho}}$ حيث S هو الشد السطحي للسائل و ρ كثافة السائل. جد سرعة مجموعة الأمواج لهذه الموجات.

س12/ إذا عملت أن سرعة موجات ماء المحيط هي $\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ حيث g هو التعجيل الأرضي. جد سرعة مجموعة الأمواج.

مبدأ اللادقة أو عدم التحديد (*Un certainty Principle*).

وفق مفاهيم الميكانيك الكلاسيكي لا توجد هناك حدود تفرض على دقة القياس. فأن كان هناك عيباً في أجهزة القياس يؤثر على دقة قياساته فبتحسينه يمكن الحصول على نتائج في غاية الدقة. ويصح نفس الشئ في الميكانيك الكمي ولكن لمتغير واحد فقط. والأمر يختلف تماماً في حالة قياس متغيرين وفي وقت واحد. فمثلاً عند قياس إحداثي جسيم وزحمة في وقت واحد، نجد عند قياس ألإحداثي يستلم الجسيم زحماً خارجياً فيؤثر ذلك على دقة قياس زحمة الأني. والعكس أيضا صحيح أي عند قياس زخمه في أول الأمر يتغير موضعه فيؤثر ذلك على دقة قياسه. وبعبارة أخرى، نحصل على معلومات دقيقة حول تمركز الجسم في الفضاء على حساب المعلومات حول الزخم. وكلما كانت معلوماتنا دقيقة حول موضع الجسيم كانت معلوماتنا غير دقيقة حول الزخم والعكس أيضاً صحيح. عندما نقول أن جسيماً في نقطة (x) وزخمه (P_x) نعني بذلك علينا قياس الاحداثي (x) وزخمه (P_x) في وقت واحد. ولكن أذا قمنا بتحليل عملية القياس نجد، أنه لا يمكننا قياس أي من وضع أو الزخم بالإبعاد الذرية دون أن تضطرب حركة الجسيم بشكل ملحوظ ولتوضيح ذلك نأخذ أحد الأمثلة على ذلك.

المثال التوضيحي حول مبدأ اللادقة:-

هو إمرار حزمة من الالكترونات من شق ضيق وإسقاطها على لوح فوتوغرافي على مسافة من الشق. كل إلكترون يسقط على اللوح يعني سبق وأن مر من الشق. فإذا كان عرض الشق(Δy) فعندئذ تكون اللادقة في الاحداثي (y) للإلكترون مقدارها Δy . وعند تصغير عرض الشق تزداد الدقة في معرفة الاحداثي (y) للإلكترون في اللحظة يمر فيها من الشق. وعند تضيق الشق جداً يظهر نمط حيود واضح جداً على اللوح الفوتوغرافي. وتفسير نمط الحيود هذا هو أن الإلكترون يستلم زخم إضافي مواز للشق في اللحظة التي يمر فيها منه.

اعتماداً على هذا المفهوم مفهوم الاحتمالية لتحديد سرعة وموقع أي جسيم كان فقد وضع هايزنبرغ (Heisenberg) عام (1927) مبدأ اللادقة أو عدم التحديد الذي يقول فيه ((أنه ليس من الممكن أبداً معرفة موقع الجسيم وزخمه بدقة في آن واحد)). فإذا كان مقدار اللادقة في تحديد موقع جسيم هو (ΔX) وفي زخمه (ΔP_X) فعندئذ:

$$\Delta X . \Delta P_X \geq h \quad .....(1)$$ مبدأ اللادقة لهايزنبرك

حيث أن h: هي ثابت بلانك. والعلاقة (1) تسمى مبدأ اللادقة لهايزنبرك.

* أن مبدأ اللادقة أو عدم التحديد هذا يفسر الازدواجية الموجية – الجسيمية لجميع الظواهر الفيزياوية، (أي إنها لا تعتمد على مقدار الخطأ الذي يصاحب استخدام أجهزة القياس والخطأ الناتج عن تلك الأجهزة ولا الخطأ الذي يصاحب التصميم أو بناء التجارب المختبرية). ويعتبر في الوقت الحاضر من المبادئ المهمة في الفيزياء الحديثة.

* ومن الأشكال الأخرى المقبولة في تطبيق عدم التحديد اعتماد العلاقة التالية بدلاً من العلاقة السابقة:

$$\Delta X . \Delta P_X = h / 2\pi$$

س/ أشتق العلاقة المسماة بمبدأ اللادقة لهايزنبرك.

الحل: من تعريف طول موجة دي برولي:-

$$\because \lambda = \frac{h}{P} \ldots.(2)$$

وأن $K = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ .....(3) العدد الموجي (Wave number)

$$\therefore K = \frac{2\pi\ P}{h} \Rightarrow P = \frac{h\ K}{2\pi} \quad .....(4)$$

لذا فأن الخطأ ΔK في تحديد العدد الموجي يولد خطأ ΔP في زخم الجسم تبعاً للمعادلة التالية الناتجة من نشتق المعادلة (4):-

$$\Delta P=\frac{h}{2\pi}\Delta K$$

$$\Delta P=\frac{h}{2\pi}\Delta K.\frac{\Delta X}{\Delta X}$$

$$\Delta X.\Delta P=\frac{h}{2\pi}\Delta K.\Delta X$$

ولما كان $\Delta K=\frac{1}{\Delta X}$ و $\Delta X.\Delta K\approx 1$ عليه تكون

$$\Delta X.\Delta P\geq\frac{h}{2\pi}\;....(5)$$

من الممكن استخدام :- ($\hbar=\frac{h}{2\pi}$).

حيث أن $\hbar=1.054\times 10^{-34}\,J.S$

و المعنى الفيزياوي العلاقة (5)هو كالأتي:- أذا كان هناك جسيم داخل المنطقة ($x-\frac{1}{2}\Delta X$) و($x+\frac{1}{2}\Delta X$) حيث أن ΔX تمثل اللادقة في موضع الجسيم. وكان زخمه يقع بين ($P_x-\frac{1}{2}\Delta P_x$) و($P_x+\frac{1}{2}\Delta P_x$) حيث ($\Delta\pi X$) تربط مع ΔX بالعلاقة (5) فعند ΔP_x هي اللادقة في زخم الجسيم. وبعبارة أخرى، كلما صغرت قيمة (ΔX) فأن (ΔP_x) ستكون كبيرة، وإذا صغرت (ΔP_x) بطريقة ما فأن (ΔX) ستكون كبيرة.

لذلك وفي دراسة طبيعة الأمواج، يمكن بسهولة إيجاد العلاقة بين الخطأ المصاحب في قياس موقع الجسيم ΔXوالخطأ في قياس زخمه ΔP في التجربة لقياس الموقع و الزخم في آن واحد.

* هناك متغيرات أخرى تستخدم لتوضيح مبدأ اللادقة لهايزنبرك فمثلاً أذا كانت (E) تمثل طاقة منظومة في الزمن (t) فعندئذ يمكن البرهنة على أن:-

$$\Delta E\times\Delta t\geq h$$

وعند استخدام تحليلات أكثر دقة تصل إلى:-

$$\Delta E\times\Delta t\geq\hbar\;....(6)$$

أي أن حاصل ضرب الخطأ في قياس الطاقة ΔEو الخطأ في تحديد الزمن Δtفي أي عملية أكبر من $\hbar$ أو يساويه ومن العلاقة:-

$E=h\gamma$ نشتقها

$$\Delta E=h\Delta\gamma$$

$$\Delta\gamma=\frac{\Delta E}{h}\quad ....(7)$$

وكمثال بسيط على أهمية هذا النوع من المعادلات (6) و (7) نطرح السؤال التالي:-

س/ أن معدل الفترة الزمنية في تهيج الذرة وإشعاعها للفوتون هو حدود (10^{-8}) ثانية، ما هو قيمة الخطأ في تقدير طاقة الفوتون وتردده؟

$$\Delta E\times\Delta t\geq\hbar$$

$$\Delta E=\frac{\hbar}{\Delta t}$$

$$\Delta E=\frac{1.05\times 10^{-34}\,J.\cancel{s}}{10^{-8}\,\cancel{s}}$$

$$\Delta E=1.054\times 10^{-26}\,J$$

في حين تكون قيمة الخطأ في تردد الضوء:-

$$E = h\gamma$$

$$\Delta E = h\Delta\gamma \Rightarrow \Delta\gamma = \frac{\Delta E}{h}$$

$$\Delta\gamma = \frac{1.054\times10^{-26}\cancel{J}}{6.63\times10^{-34}\cancel{J}.\sec} \Rightarrow$$

$$\Delta\gamma = 1.6\times10^{7}\,Hz$$

* ومن الأمور المهمة التي يجب أن نتذكرها هو أن تأثير مبدأ عدم التحديد يكون مهما فقط في عالم الذرات والجسيمات الأولية، ذلك لأن ثابت بلانك صغير جداً.

مثال/:- لنفرض أن سرعة الإلكترون قيست بدقة تصل إلى (1cm/sec) ما هو أصغر احتمال للخطأ في قياس موقع الإلكترون.

$$\Delta\upsilon = 1cm.\sec^{-1} = 10^{-2}\,m/\sec$$

نأخذ المشتقة لهذه المعادلة $P = m_e\upsilon$

$$\Delta P = m_e\Delta\upsilon$$

$$\Delta P = 9.1\times10^{-31}kg\times10^{-2}\,m/\sec$$

$$\Delta P = 9.1\times10^{-33}\,\frac{m.kg}{\sec}$$

ملاحظة

$$J = kg.\frac{m^2}{\sec^2}$$

$$\Delta X.\Delta P \geq h \Rightarrow \Delta X = \frac{h}{\Delta P}$$

$$\Delta X = \frac{6.63\times10^{-34}\,J.\sec}{9.1\times10^{-33}\,\frac{m.kg}{\sec}}$$

$$\Delta X = 0.7\frac{J}{kg\frac{m}{\sec^2}\times\frac{m}{m}}$$

$$\Delta X = 0.07\frac{J}{kg\frac{m^2}{\sec^2}.\frac{1}{m}}$$

$$\Delta X = 0.07\frac{\cancel{J}}{\cancel{J}}.\frac{1}{\frac{1}{m}}$$

$$\Delta X = 0.07m$$

مثال/ وضح أن مبدأ هايزنبرك يجب أن يؤخذ بنظر الاهتمام فقط في الإبعاد الذرية من خلال نتجة حساب اللادقة في سرعة كل من كرة كتلتها (1kg) تكون حدود الدقة في حساب موضعها (10^{-6}m) مرة وللإلكترون مرة أخرى على أن لا تأخذ حدود الدقة في حساب موضعه في الذرة أكبر من (10^{-6}m).

الحل:-

$$\Delta P_x\,.\Delta X \geq h \;....(1)$$

$$\because P = m\upsilon \;....(2)$$

نشتق المعادلة (2)

$$\Delta P = m\Delta\upsilon \ldots.(3)$$

نعوض المعادلة (3) في (1) لتصبح بالشكل التالي:-

$$\Delta\upsilon_x \ .\Delta X \geq \frac{h}{m}$$

$$\Delta\upsilon_x \geq \frac{h}{m}.\frac{1}{\Delta X}$$

أولاً:- في حالة الكرة.

$$\Delta\upsilon \geq \frac{6.6\times10^{-34} J.\sec}{1kg}\times\frac{1}{10^{-6}m}$$

$$\Delta\upsilon_x = 6.6\times10^{-28} m/\sec$$

وهذا الخطأ من الصغر بحيث لا يؤخذ بنظر الاعتبار أبدا.

ثانياً:- في حالة الإلكترون.

$$\Delta\upsilon_x \geq \frac{6.6\times10^{-34} J.\sec}{9.11\times10^{-31} kg}\times\frac{1}{10^{-10}m}$$

$$\Delta\upsilon_x = 7.3\times10^{6} m/\sec$$

وهذه النتيجة تعني أن اللادقة في السرعة عالية جداً في الإبعاد الذرية. أذن مبدأ هايزنبرك يجب أن يؤخذ بنظر الاهتمام فقط في الإبعاد الذرية.

مثال/:- يقدر قطر عنصر الألمنيوم (7.2×10^{-15}m) ولدراسة البروتون داخل النواة يعتمد الخطأ في تحديد موقع البروتون بأقل من (7.2×10^{-15}m) ما هو أقل خطأ محتمل في قياس الزخم وسرعة البروتون؟

$$\Delta X.\Delta P \geq h \Rightarrow \Delta P = \frac{h}{\Delta X} = \frac{6.63\times10^{-34} J.\sec}{7.2\times10^{-15} m}$$

$$\Delta P = 9.2\times10^{-20}\ \frac{kg.\frac{m^{\cancel{2}}}{\sec^{\cancel{2}}}.\cancel{\sec}}{\cancel{m}}$$

$$\Delta P = 9.2\times10^{-20} kg.m/\sec$$

$$P = m_p\upsilon \Rightarrow$$

$$\Delta P = m_p\Delta\upsilon \Rightarrow \Delta\upsilon = \frac{9.2\times10^{-20}\cancel{kg}.m/\sec}{1.67\times10^{-27}\cancel{kg}}$$

$$\Delta\upsilon = 5.5\times10^{7} m/\sec$$

ملاحظة:- هنا في هذا السؤال نفرض بأن قطر النواة بأنه عبارة عن صندوق ذو أبعاد ΔX لتقريب الصورة.

مثال/:- إلكترون بسرعته (600 *m/sec*) ودقة للقياس لهذه السرعة هي (0.005%) أحسب الدقة في تعيين موقع ΔX ؟

$$P = m_e\upsilon \ldots(1)$$

نشتق المعادلة (1)

$$\frac{\Delta P}{\Delta\upsilon} = me$$

$$\Delta P = me\Delta\upsilon \ldots.(2) \ \because \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = 0.005\%$$

$$\Delta\upsilon = \upsilon \times 0.005\%$$

$$\Delta\upsilon = 600 \times \frac{0.005}{100} = 0.03 \Rightarrow$$

$$\Delta\upsilon = 0.03 \ldots\ldots (3)$$

نعوض (3) في (2)

$$\therefore \Delta P = 9.1\times10^{31} kg \times 0.03 m.\sec^{-1}$$

$$\Delta P = 0.273\times10^{-31} kgm/\sec$$

$$\Delta X.\Delta P \geq \hbar$$

$$\Delta X = \frac{\hbar}{\Delta P} = \frac{1.054\times10^{-34} J.\sec}{0.273\times10^{-31} kg.m/\sec}$$

$$\Delta X = 3.86\times10^{-3} m$$

مثال/:- باستخدام مبدأ اللادقة $\Delta E.\Delta t \geq \hbar$ احسب الزمن اللازم والذي تحتاجه الذرة لكي تبعث فوتونات طولها الموجي ($6000A^o$) وبدقة مقدارها ($\Delta\lambda = 10^{-4} A^o$).

$$E = h\gamma$$

$$E = h\frac{C}{\lambda}$$

$$E = hC\lambda^{-1} \quad \ldots\ldots(1)$$

ملاحظة:- نشتق المعادلة (1) وذلك حتى نحصل على معادلة تحتوى على $\lambda, \Delta\lambda$.

$$\frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = -hC\lambda^{-2}$$

$$\Delta E = \frac{-hC}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\Delta E = \frac{6.63\times10^{-34} J.\sec\times 3\times10^{8} m.\sec^{-1}\times10^{-4}\times10^{-10} m}{\left(6000\times10^{-10}\right)^2}$$

$$\Delta E.\Delta t \geq \hbar$$

$$\Delta E.\Delta t = \hbar$$

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$\Delta t = \frac{1.054\times10^{-34} J.\sec}{5.525\times10^{-34} J}$$

$$\Delta t = 1.9 \sec$$

ملاحظة (مهمة)

إذا كان لدينا جسم كـ (السيارة) كتلته (m) ويسير بسرعة قدرها (υ) والمطلوبة وتحديد الدقة في الزخم هل يمكن ذلك؟

هنا لا يجوز استخدام قوانين اللادقة لأنها تطبق فقط على الجسيمات الأولية كـ (N، P، e) وهكذا.

تطبيقات الخاصية الموجية للجسيمات

1- المجهر الإلكتروني.

2- العدسات الإلكتروستاتيكية.

3- العدسات المغناطيسية.

1- المجهر الإلكتروني (The Electron Microscope):-

من التطبيقات المهمة للصفة الموجية للجسيمات هو المجهر الإلكتروني لقد لاحظنا سابقاً كيف أن الإلكترونات السريعة تتصرف كأنها موجات قصيرة جداً حيث تم بذلك استبدال الأمواج فوق البنفسجية بمثل هذه الأشعة أو سيل الالكترونات السريعة في عمل المجهر الإلكتروني. أن الطول موجة دي برولي لسيل من الالكترونات المعجلة تحت فرق جهد كهربائي قيمته (V) تساوي:-

$$\lambda = \frac{12.3A^o}{\sqrt{V}}$$ طول موجة ديبرولي

λ : طول موجة دي برولي بهذه المعادلة تكون مقاسه بوحدة (A^o).

وذلك بالاعتماد على المعادلات:-

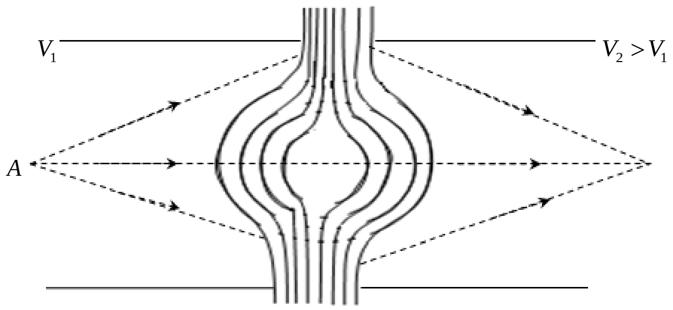
$$\lambda = h/m\upsilon$$

$$m\upsilon = \sqrt{2mT}$$ (زخم الالكترونات)

وإذا كانت قيمة (V) مثلاُ بحدود عشرة آلاف فولت (10,000V) فأن قيمة طول الموجة المصاحبة للالكترونات ستكون بحدود (0.122) انكستروم وهذا الطول الموجي أقصر بكثير م الطول الموجي للأشعة فوق البنفسجية لذلك يمكن الحصول على قوة تكبير وقوة تحليل أكبر عند استعمال جسيمات الالكترونات المعالجة. ومن التحولات التي يتطلب إدخالها هنا هو الاستعاضة بالعدسات الزجاجية بما يسمى العدسات الالكتروستاتيكية الكهربائية والعدسات المغناطيسية.

2- العدسات الالكتروستاتيكية (Electrostatic Lenses)

تتكون هذه العدسات من تجوفين كل منهما على شكل اسطوانة جوفاء يسلط عليها جهداً كهربائياً بحيث يكون الجهد الكهربائي لأحدهما أعلى من الثانية كما هو موضح في الشكل (1).

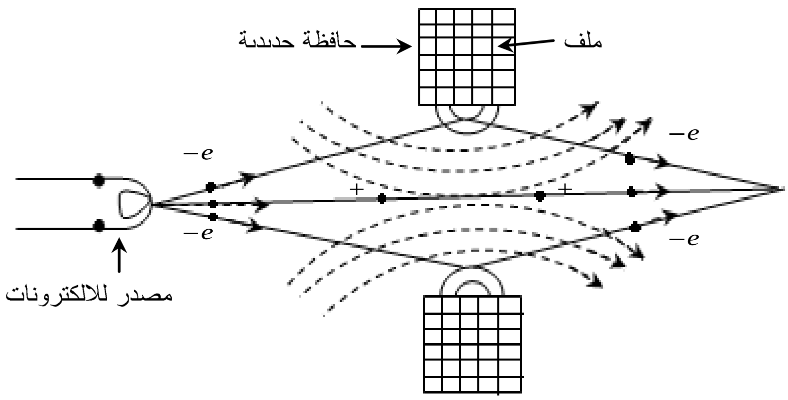


الشكل (2) العدسات الالكتروستاتيكية.

الالكترونات أقل من هذين الجهدين. وفي الشكل تظهر ($V_2 > V_1 > V_e$) والخطوط الوسطية تمثل خطوط تساوي الجهد نتيجة فرق الجهد الاسطوانتين.

3- العدسات المغناطيسية (Magnetic Lenses)

في الشكل (3) يتبين لنا تركيب العدسات المغناطيسية وعمل المجال المغناطيسي لتجميع وتركيز سيل الالكترونات المنبعثة من المصدر. فعند اجتياز الالكترونات المجال المغناطيسي ستتحرك بشكل لولبي متجهة نحو نقطة التركيز أو البؤرة كما هو موضح في الشكل.



الشكل (3) يوضح العدسة المغناطيسية.

وللحصول على المجهر الإلكتروني يتم التعويض عن العدسات الزجاجية (الشيئية والعينية وغيرها) والأشعة الاعتيادية بالعدسات الالكتروستاتيكية أو المغناطيسية وبمصدر من الالكترونات وبعض الحسابات الفيزياوية البسيطة على مجهر الكتروني أصبح استخدام مثل هذا المجهر من الأجهزة المهمة والمفيدة في مختبرات متنوعة.

يمكن الحصول على مجهر إلكتروني بمواصفات متميزة ومفيدة حيث أصبح استخدام مثل هذه المجاهر ضروري في أمور كثيرة.

واجب

س1/ إلكترون طاقته تساوي (1kev) أجريت تجربة لتحديد موقع وزخم الإلكترون بصورة أنية إذا كان الخطأ في تحديد موقع الإلكترون هو حوالي ($1A^o$)، جد الخطأ النسبي في قياس زخم الإلكترون.

س2/ مجهر إلكتروني يستخدم الكترونات طاقتها (40kev). جد قوة تحليل المجهر على افتراض أنها تساوي طول موجة دي برولي للالكترونات.

س3/ قارن بين الخطأ في سرعة إلكترون والخطأ في سرعة بروتون محصورين داخل صندوق طول ($10A^o$).

س4/ إذا علمت أن دقة قياس الطول الموجي هي بحدود ($\left(\frac{1}{10^6}\right)$) جد الخطأ في تحديد موقع أشعة سينية طولها الموجي ($1A^o$) في تجربة لقياس موقع وطول موجة الفوتون أنيا.

س5/ في لحظة معينة يتم تحديد موقع إلكترون بدقة ($\pm10^{-11}m$) جد الخطأ في تحديد زخم الإلكترون عند نفس اللحظة (t) وجد الخطأ في تحديد زخم الإلكترون بعد ثانية واحدة وإذا كان الخطأ الأخير لا يساوي ($\pm10^{-11}m$) ناقش هذا الاختلاف على أساس وصف الجسيم المتحرك كمجموعة موجات.

س6/ a- ما الوقت اللازم لقياس الطاقة الحركية لإلكترون سرعته (10m/sec) إذا كان الخطأ المسموح في قياس هذه الطاقة أقل من (0.1%)؟ ما لمسافة التي يقطعها الإلكترون خلال هذه الفترة؟

b- أجر نفس الحسابات لحالة حشرة كتلتها غرام واحد ولها نفس سرعة إلا ($\bar{e}$). ماذا تعني لك هذه النتائج؟