الفصل التاسع/ ميكانيك الكم

المقدمة:

** لقد وضعت النظرية الخاصة بالميكانيك الكم خلال (1925-1930) من قبل العالم شرودنكر والعالم هايزنبيرك كنظرية أكثر شمولية من نظرية بوهر و لتفسير عدد هائل من الظواهر.

** من الملاحظ أن ميكانيك نيوتن يتفق مع النتائج العملية في ظروف المشاهدة اليومية فقط.

** ومن الأمور المهمة في الميكانيك الكمي أنه الكميات المقاسة يمكن أن تعطى بشكل معدل.

الدالة الموجية(**Wave function** (ψ))

كما ذكرنا سابقاً أن الكمية المتضمنة في ميكانيك الكم هي دالة الموجة (ψ) وتعرف على أنها الدالة التي تصف الحالة الحركية لجسيم متحرك (طاقته، زخمه،......الخ) وتمثل الموجة المادية المرابطة للجسم وذلك اعتماداً على فرضية دبرولي التي تنص على أن كل جسيم متحرك ترافقه موجة مادية طولها (λ) وترتبط بزخم الجسيم بالعلاقة:-

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m\upsilon}$$

* أن مربع (ψ) أو ($|\psi(X)|^2$) أو ($\psi^*(X)\psi(X)$) تمثل احتمالية تواجد الجسيم الموصوف بالدالة الموجية ($\psi(X)$) في النقطة (x) كثافة الاحتمالية أو احتمالية لوحدة الطول.

* لذلك يمكن القول أن أساس ميكانيك الكم هو حساب (ψ) لجسيم محصور تحت تأثير قوة خارجية وتسمى الدالة الموجية.

* **خواص أو شروط الدالة الموجية:-**

1- ψ دالة أحادية القيمة (Single Value) قيمة واحد عند كل زمان ومكان.

2- أن كل من الدالة الموجية ($\psi(X)$) ومشتقتها الأولى $\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial Z}$ وكذلك (........، $\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial Z}$) يجب أن تكون:-

a- محددة (finite) ($\psi \neq \infty$).

b- مستمرة (continuous).

** لكي تكون الدالة مستمرة في نقطة مثل ($x=a$) فأن:-

1- موجود $\ell im_{x\to a} \ f(x)$ exists.

2- $f(x)$ is finite.

3- $\ell im \ f(x) = f(a)$.

معادلة شرونكر المعتمدة على الزمن

تستخدم هذه المعادلة عندما تكون الدالة (ψ) دالة للموضع والزمن معاً ويمكن كتابة بالشكل التالي:-

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + V\psi$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة أعلاه تعتمد على الاحداثي (x) فقط في حين يعتمد الطرف الأيمن على الاحداثي (t) وهذه المعادلة لا تصح إلا إذا ساوى كل من الطرفين كمية ثابتة ولتكن (E).

الطرف الأيسر $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + V\psi = (E)$

* حيث أن طاقة الجسيم الكامنة V هي دالة للموقع x والزمن t وتكتب $V(x, t)$.

** من الممكن حل معادلة شرودنكر لإيجاد الدالة الموجية للجسيم (ψ) إذا عرفنا V عند كل نقطة x وزمن t.

** من الممكن كتابة المعادلة أعلاه بالنسبة لـ $t,\ Z,\ y,\ x$ أي بثلاث إبعاد مع الزمن.

المعدلات أو القيم المتوافقة:- (Expectation Value Average)

* لا يستطيع الميكانيك الكمي التنبؤ بنتيجة قياس واحدة لكمية فيزياوية معينة كالموضع أو الطاقة وإنما يستطيع يتنبأ بقيمة دقيقة لمعدل عدد كبير من القياسات. توجد فرضية في الميكانيك الكمي تنص على أن معدل قيمة فيزياوية معينة $<x>$ يعطى بالعلاقة:-

$$<x>=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 .dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dX} \ .....(1)$$

وإذا كانت دالة الموجة ψ مقومة فأن مقام المعادلة (1) يساوي واحداً وبذلك تصبح المعادلة (1) بالشكل التالي:-

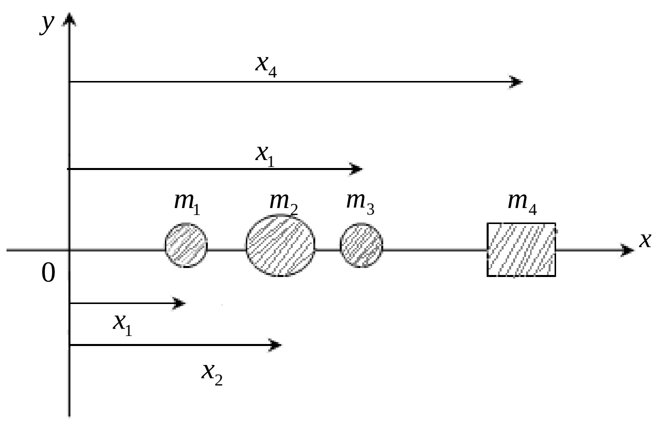
$$<x>=\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 .dX \ ....(2)$$

ويلاحظ أن $<x>$ هو مركز توزيع $|\psi|^2$ ويعادل نقطة توازن المنحني والمحور x.

* ويمكن كتابة المعادلة (2) بشكل عام لإيجاد معدل أي كمية مثلاً $G\ (X)$ والمتغيرة مع الزمن لجسيم دالته الموجبة(ψ).

$$<G(x)>=\int_{-\infty}^{\infty} G(x).|\psi|^2 .dX$$

ملاحظة:- من المعلومات السابقة في حساب مركز ثقل جسم أو مركز مجموعة من الكتل موزعة على المحور x والتي يراد تحديده بالنسبة لمجموعة الكتل وكمثال على ذلك أربع أو خمس كتل مثل (m_4, m_3, m_2, m_1) تقع على مسافة ($x_4, ..., x_2, x_1$) فأن مركز الثقل يحسب من فكرة العزوم حول نقطة وهي المركز.



$$(m_1+m_2+m_3+m_4).\overline{X}=m_1X_1+m_2X_2+......$$

$$\overline{X}=\frac{m_1x_1+m_2X_2+........}{m_1+m_2+..........}$$ بعد مركز الثقل عند نقطة الأصل (o)

$$\bar{x}=\frac{\sum m_iX_i}{\sum m_i}$$ مركز ثقل الجسم.

معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن:-

* تستخدم هذه الحالة عندما تكون الطاقة الكامنة (V) للجسيم لا تتغير مع الزمن أي أن القوى المؤثرة على الجسيم ثابتة وبالتالي (V) تعتمد على موقع الجسيم فقط.

** أن معادلة شرودنكر الغير المعتمدة على الزمن تستخدم عندما تكون الدالة الموجية (ψ) دالة للموضع فقط.

** ومن الممكن تبسيط المعادلة بإزالة متغير الزمن (t) ويمكن كتابة المعادلة عندئذ بالشكل التالي:-

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V]\psi=0$$

حيث (V) هي الطاقة الكامنة و (E) هي الطاقة الحركية.

** من الملاحظ أن النظام لا يمكن أن يوجد في حالة مستقرة ألا عندما تكون الطاقة مكممة. وهي صفة عامة لجميع النظام المستقرة.

** أن قيم الطاقة (E) التي تأخذ عندها معادلة شرودنكر حلولاً مقبولة فيزياوياً تدعى بالقيم المسموحة وتسمى عندئذ دالات الموجة التابعة لها بالدلالات المسموحة.

** أن مستويات الطاقة المنفصلة في ذرة الهيدروجين مثال للطاقات المسموحة وتمثل بـ :-

$$E_n=\frac{me^4}{32\pi^2\in_o^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ومثال أخر تكمم الزخم الزاوي في ذرة الهيدروجين:-

$$L=\sqrt{\ell(\ell+1)}\times\hbar$$

<u>أمثلة وتطبيقات على معادلة شرودنكر:-</u>

a- جسيم داخل صندوق صلب الجدران (صندوق الجهد ذو البعد الواحد) أن سبب استخدام هذا المثال يأتي من:

1- لدراسة حل معادلة شرودنكر لجسيم محصور في حيز محدود.

2- دراسة الصفات الأساسية لحلول هذه المعادلة.

3- لمقارنة نتائج ميكانيك الكم مع الميكانيك الكلاسيكي.

b- المتذبذب التوافقي.

a- <u>جسيم داخل صندوق صلب الجدران (صندوق الجهد ذو البعد الواحد)</u>

هي منطقة يكون فيها الجهد = صفراً وفي خارجها ($V=\infty$) مثل حالة جزيئة غاز محصورة في وعاء محكم حيث يتحرك بحرية حتى تضرب جدار الوعاء فترتد. كما تتصرف الالكترونات الحرة في المعادن بطريقة مشابه حيث لا يمكن للالكترونات الانفلات من المعدن بل يتحرك بحرية بداخله. لإيجاد الدالة الموجية للجسيم المحصور في صندوق جهد ذي بعد واحد (عرضه = a) كما في الشكل نطبق معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن لبعد واحد وكما يلي:-

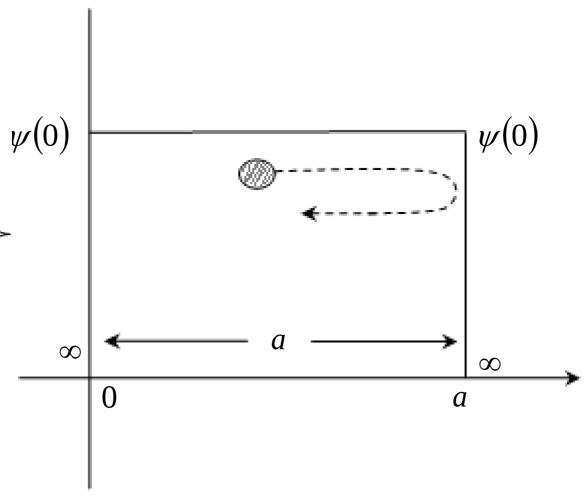
وباستخدام معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن لبعد واحد.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V]\ \psi(X)=0$$

داخل الصندوق $o<x<a$ $(V=0)$.

$$\therefore\ \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(X)=0$$

لنأخذ أن $\frac{2mE}{\hbar^2}=k^2$



توضيح

$\frac{2mE}{\hbar^2}$ = مقدار ثابت

$\frac{P^2}{\hbar^2}$ = مقدار ثابت $\Rightarrow\frac{P^2}{\hbar^2}=k^2$

الشكل يمثل جسيم محصور في صندوق عرضه (a).

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+k^2\ \psi(X)=0$$

الحل العام لهذه المعادلة يكون:-

$$\psi\,(X) = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{الحد الأول}} + \underbrace{Be^{ikx}}_{\text{الحد الثاني}}$$

الحد الأول يمثل دالة الموجة لجسيم عند حركته إلى اليمين باتجاه (x) بزخم $\hbar\,\vec{k} = \vec{P}$ أما الحد الثاني فيمثل الدالة الموجية لجسيم عند حركته إلى اليسار باتجاه $(-x)$ وبزخم $\vec{P} = -\hbar\,\vec{k}$.

$\psi(x) = 0$ at $x = 0$ and $x = a$

at $x = 0$

$\psi(0) = A + B = 0 \qquad \therefore A = -B$

$\psi(x) = Ae^{ikx} - Ae^{-ikx}$ عوضنا عن B بـ$(-A)$

$\because e^{\mp ix} = \cos x \mp i \sin x$

$\psi(x) = A(\cos kx + i\sin x) - A(\cos kx - i\sin kx)$

$\psi(x) = 2iA\sin kx$

(C)هي $(2iA)$

$\psi(x) = C\sin kx$

at $x = a$

$\psi\,(a) = C\sin\,ka = o \Leftarrow (x = 0 \text{ and } x = a$ عندما $\psi\,(x) = 0$ وفيها أعلاه المعادلة إلى انظر) :ملاحظة مهمة

(لأنه مقدار ثابت) $C \neq 0$ وبما أن

$$\therefore \sin ka = 0$$

$$ka = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ..., n\pi$$

إذن $n = 0, 1, 2.........$

حذفت $(n=0)$ لأن ليست لها معنى فيزياوي

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

إذن زخم الجسيم داخل الصندوق

$$P_n = \hbar k$$

$$P_n = \frac{n\pi\hbar}{a} ......(1)$$ (مهمة)

طاقة الجسيم تساوي $E = \frac{P^2}{2m}$

ملاحظة $(P = \sqrt{2mE}\,)$

طاقة الجسيم(مهمة) $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2a^2m} .....(2)$

$n=1, 2, 3, ...$

* أن المعادلة (1) تعطي زخم جسيم محصور داخل صندوق مغلق (صندوق الجهد ذي البعد الواحد).

* أن العدد الكمي (n) يدعى العدد الكمي للطاقة.

** من الملاحظ أن الجسيم لا يمكن أن تساوي صفراً لأنه دالته الموجبة (ψ) المصاحبة لحركة الجسيم ستكون عندئذ صفراً وكثافة الاحتمالية ستكون أيضا صفراً وهذا غير مقبول، أي سوف لن يكون الجسيم موجوداً عندئذ في الحيز $(0 < x < a)$.

$$n=4 \text{ ———————— } E_4=16E_1$$
$$n=3 \text{ ———————— } E_3=9E_1$$
$$n=2 \text{ ———————— } E_2=4E_1$$
$$n=1 \text{ ———————— } E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

الشكل يوضح مستويات الطاقة لصندوق جهدي أحادي البعد.

* أن هذه الصفات أي كون (E_1) ليست صفراً إضافة إلى تكمم الطاقة (E_n) هي صفات كمية تختلف تماماً عما هو ملاحظ في ميكانيك نيوتن. أي أن ميكانيك نيوتن (الميكانيك الكلاسيكي) من الممكن أن تكون القيمة (E_1) صفراً ولا يمكن ملاحظة تكمم الطاقة. ورب سائل يسأل/ لماذا لا نلاحظ تكمم الطاقة في حياتنا العادية وفي المختبر مثلاً.

الجواب/ أنه حتى لو كانت هناك قيماً مكممة لكن بسبب صغر الفرق بين الكميات سوف لن تكون هناك إمكانية لتميز مثل هذه الظاهرة أي الظاهرة الكمية.

مثال/ على ذلك لو أخذنا مثلاً حركة كرة البليارد وافترضنا أن كتلتها تساوي (100) غرام تتحرك داخل صندوق ذو جدران صلبة تبتعد بمسافة (100cm) عن بعضها وأجرينا مقارنة مع إلكترون في صندوق المجال عرضه بحالته الطبيعية واحد ($1A^o$=10^{-10}m).

(مهمة) الحل/ في حالة الإلكترون وعند استخدام المعادلة التالية واعتماد القيم الخاصة بالمسافة نحصل: -

$$E_n=\frac{n^2\ \pi^2\ \hbar^2}{2m\ a^2}$$

$$a = 1A^o = 10^{-10}m,\ m_e = (9.1\times10^{-31}kg)$$

فستكون مستويات الطاقة (E_n) المسموحة هي كالأتي:-

$$E_n=\frac{n^2.\pi^2(1.05\times10^{-34}J.\sec)^2}{2\times9.1\times10^{-31}kg\times(10^{-10}m)^2}$$

$$E_1=6.0\times10^{-18}J=38ev$$

$$E_2=(2)^2\times38ev=152ev=2\times10^{-18}J$$

$$E_3=(3)^3\times38ev=342ev=54\times10^{-18}J$$

$$E_4=608ev=96\times10^{-18}J$$

أما قيم مستويات الطاقة لكرة البليارد فستكون عند اعتماد القيم المعطاة في المسألة: (a=1m، m=0.1kg).

$$E_n=\frac{n^2.\pi^2(1.05\times10^{-34}J.\sec)^2}{2\times10^{-1}kg\times1m}$$

$$E_n=n^2\times0.55\times10^{-64}J$$

$$E_1=0.55\times10^{-64}J$$

$$E_2=(2)^2\times0.55\times10^{-64}=2.2\times10^{-64}J$$

$$E_3=4.95\times10^{-64}J$$

$$E_4=8.8\times10^{-64}J$$

وبمقارنة بسيطة بين الحالتين، حالة الإلكترون وحركته في الذرة وحالة كرة البليارد داخل الصندوق سنرى: -

أولا: أن مستويات الطاقة تعتبر متباعدة نسبياً عن بعضها حيث يمكن تمييزها بينما مستويات الطاقة لكرة البليارد لا يمكن تمييز قيمتها خلال ملاحظتنا وقياساتنا الاعتيادية.

ثانياً: إن كرة البليارد بهذه القيم من الطاقة الحركية ستكون سرعتها الاعتيادية متناهية في الصغر وتقارب السكون ولا يمكن قياسها.

س1/ إلكترون مرتبط بجهد يمكن تقريبه بالبئر المربع اللانهائي عرضه (2×10^{-8}cm)، أحسب أقل ثلاث مستويات مسموحا بها لطاقة الإلكترون؟

الحل:-

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$E_1 = \frac{(3.14)^2 \times (1.05\times10^{-34})^2}{2\times9.1\times10^{-31}kg\times(2\times10^{-8}\times10^{-2}m)^2}$$

$$= \frac{9.8596\times1.1025\times10^{-64}}{7.28\times10^{-50}}$$

$$= \frac{1.493\times10^{-18}\cancel{J}}{1.6\times10^{-19}\cancel{J}/ev} \Rightarrow E_1 = 9.332ev$$

عندما $(n = 2)$

$$E_2 = \frac{(2)^2\times1.087\times10^{-67}}{7.28\times10^{-50}} = 5.972\times10^{-18}J$$

$$E_2 = 3.73ev$$

عندما $(n = 3)$

$$E_3 = \frac{(3)^2\times1.087\times10^{-67}}{7.28\times10^{-50}} = 1.343\times10^{-17}J$$

$$E_3 = 83.9ev$$

س2/ بئر مربع لانهائي عرضه $2A^o$ ما هو مقدار التغير الجزئي لأقل مستويات مسموحات بها لطاقة الإلكترون في هذا الجهد إذا ازداد عرض البئر بمقدار 1- $0.02A^o$. 2- $2.00A^o$. 3- ما مقدار التغير الجزئي للمستويين إذا حل البروتون محل الإلكترون في هذا البئر.

1- إذا ازداد عرض البئر بمقدار $0.02A^o$.

أذن $L = (2+0.02) = 2.02A^o$

$n=1$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$E_1 = \frac{(3.14)^2(1.05\times10^{-34})^2}{2\times9.1\times10^{-31}(2.02\times10^{-10}m)^2}$$

$$= \frac{1.08\times10^{-67}}{7.42\times10^{-50}} = 1.46\times10^{-18}J = 9.15ev$$

$$E_2 = \frac{(2)^2\times1.087\times10^{-67}}{7.42\times10^{-50}} = 5.85\times10^{-18}J = 36.6rv$$

2-إذا زاد عرض البئر بمقدار $= 2A^o$

$$L=(2+2)=4A^o=4\times10^{-10}m$$

$$E_1=\frac{1.087\times10^{-67}}{2.9.1\times10^{-31}(4\times10^{-10}m)^2}=\frac{1.087\times10^{-67}}{2.012\times10^{-49}}=3.73\times10^{-19}J=2.33ev$$

$$E_2=\frac{(2)^2\times1.087\times10^{-67}}{2.912\times10^{-49}}=1.49\times10^{-18}J=9.33ev$$

س3/ كرة من الحديد كتلتها 30gm ترتد إلى الأمام وإلى الخلف بين جدارين صلبين المسافة بينهما (2m). فإذا كانت سرعة الكرة (0.3m/sec).

1- أوجد الطاقة الحركية للكرة.

2- وبفرض أن النظام ينطبق على جسم موجود في الجهد المربع اللانهائي أوجد العدد الكمي لحالة الكرة الحديدية.

3- ما مقدار الطاقة الإضافية التي يجب أن تكتسبها الكرة لتوصلها إلى حالة المستوى التالية.

1- $T=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

$$=\frac{1}{2}30\times10^{-3}kg\times\left(0.3\frac{m}{\sec}\right)^2=1.35\times10^{-3}J$$

2- $E_n=1.35\times10^{-3}J$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$n=\sqrt{\frac{2m\ L^2E_n}{\pi^2\hbar^2}}=\sqrt{\frac{2m\ L^2E_n}{\pi\ \hbar}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times30\times10^{-3}(2)^2\times1.35\times10^{3}}}{3.14\times1.05\times10^{-34}}$$

$$=\frac{0.018}{3.29\times10^{-34}}=5\times10^{+31}$$ مجرد من الوحدة

3- $n=6\times10^{31}$ المستوى التالي هو

$$E_{6\times10^{31}}=\frac{(6\times10^{31})^2\times1.087\times10^{-67}}{2\times30\times10^{-3}(2)^2}=\frac{6.522\times10^{-36}}{0.24}=2.7\times10^{-35}J=1.69\times10^{-6}ev$$

دالة الموجة لجسيم في صندوق (ψ):-

كما لاحظنا سابقاً أن حل المعادلة أو أن دالة موجة لجسم في صندوق عرضه (a) وطاقته (E) هي:-

$$\psi_n(x)=C\ \sin\ k\ x$$

وأن القيم المسموحة لـ k هي:-

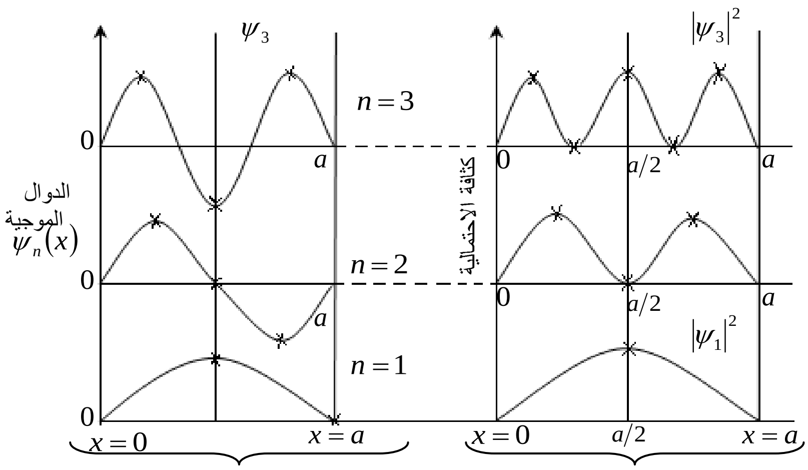
$$k=\frac{n\ \pi}{a}$$

$$\therefore\psi=C\ \sin\frac{n\ \pi}{a}x$$

ψ_n: دالة تمثل الدالات المسموحة التابعة للطاقات المسموحة E_n.

** من المهم أن نلاحظ أن $|\psi_n|^2$ تساوي كثافة الاحتمالية P لإيجاد الجسيم عند كل موقع x.

** من المهم أن نلاحظ أن $|\psi_n|^2 = 0$ عند ($x= 0$) و ($x =a$) التي تمثل حدود الصندوق.



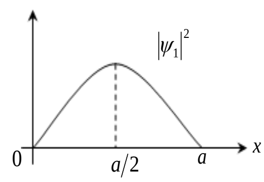
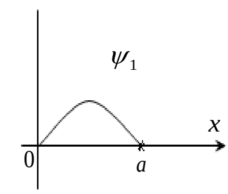
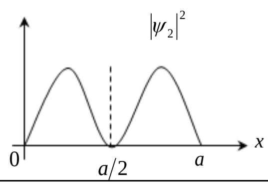
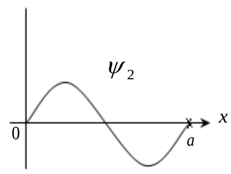
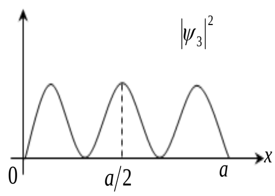
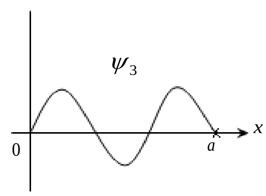
شكل (a)　　شكل (b)

الشكل (a) يمثل الدوال الموجية الثلاث الأولى لجسيم في صندوق جهدي.

الشكل (b) يمثل الكثافة الاحتمالية لمستويات الطاقة في صندوق جهدي.

* من الملاحظ أن احتمالية وجود الجسيم $|\psi_n|^2$ عند موقع معين داخل الصندوق تختلف تبعاً للعدد الكمي (n) حيث أن $|\psi_1|^2$ مثلاً لها قيمة عظمى عند ($\frac{1}{2}L$) على حين أن $|\psi_2|^2$ تساوي صفراً عند ذلك الموقع وهنا يعني أنه في حالة ($n=1$) فأن الاحتمالية كبيرة جداً لإيجاد الجسيم عند منتصف الصندوق.

*** جدول قيم الدوال الموجية والزخم والطاقة لجسيم في صندوق جهد ذي بعد واحد وبحالات مختلفة.

كثافة الاحتمالية لمستويات الطاقة في صندوق الجهد	شكل الدوال الموجية	الحالة (n)	الدالة الموجية	الزخم	الطاقة
		n = 1 الحالة الأرضية	$\psi_1(x)=C\ \sin\frac{\pi\ x}{a}$	$P_1=\frac{\pi\ \hbar}{a}$	$E_1\ \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ a^2}$
		n = 2 الحالة المتهيجة الأولى	$\psi_2(x)=C\ \sin\frac{2\pi\ x}{a}$	$P_2=\frac{2\pi\ \hbar}{a}$	$E_2\ \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m\ a^2}$
		n = 3 الحالة المتهيجة الثانية	$\psi_3(x)=C\ \sin\frac{3\pi\ x}{a}$	$P_3=\frac{3\pi\ \hbar}{a}$	$E_3\ \frac{9\pi^2\hbar^2}{2m\ a^2}$

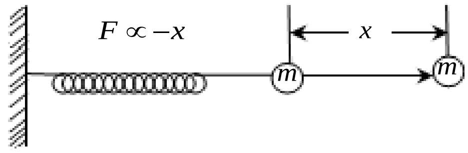
ملاحظة: أن قيمة C تم حسابها من خلال ميكانيك الكم فوجد أن قيمتها هي ($C=\sqrt{\frac{2}{a}}$).

b- المتذبذب التوافقي (*Linear Harmonic Oscillator*)

المتذبذب التوافقي الخطي هو جسيم تؤثر عليه قوة خطية تعاكس إزاحته مثل البندول والنابض والحركة الاهتزازية لذرات أو جزيئات المواد أو ذرات الصلبة البلورية. وفقاً للميكانيك الكلاسيكي تتناسب القوة المؤثرة على جسيم طردياُ مع إزاحته وفقاً لقانون هوك (Low Hooke's) ففي حالة متذبذب كتلته (m) يتحرك على محور فأن:

$F \propto (-x)$ $(F)=$ القوة المسببة للإزاحة, $(x)=$ الإزاحة

$F = -k\,x$



حيث(k) يمثل ثابت للمتذبذب Force constant

$F = m\,a = m\dfrac{d^2x}{d\,t^2}$ $(a)=$ التعجيل، $(m)=$ الكتلة

قوة الجاذبية التي إعادة الجسم إلى وضعه الأصلي= قوة المؤثرة على جسيم.

$$-k\,x = m\frac{d^2x}{d\,t^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{d\,t^2} + k\,x = 0$$

ωالتردد الزاوي

$$taking\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\,\omega^2$$

$$\frac{d^2x}{d\,t^2} + \omega^2 x = 0$$ معادلة الحركة التوافقية البسيطة

الحل المقبول لهذه المعادلة

$$x = A\,\sin\ \omega\,t$$

أما الطاقة الكامنة $V(x)$ فتعطى بالعلاقة $V = -\int_0^x F\,d\,x$

$$= k\int_0^x x\,d\,x = \frac{1}{2}k\,x^2$$

الطاقة الكلية:-

$$E = T + V$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\left(A\,\omega\ \cos\ \omega\,t\right) + \frac{1}{2}m\,\omega^2\left(A\ \sin\ \omega\,t\right)^2$$

الطاقة الكلية $E = \dfrac{1}{2}m\,\omega^2 A^2$

* كلاسيكياً الطاقة تبدأ من الصفر وتأخذ قيماً مستمرة

<u>المعالجة الكمية</u> (quantum treatment):-

تستخدم معادلة شرودنكر غير معتمد على الزمن ولبعد واحد.

$$\frac{\partial^2\psi\ (x)}{\partial\ x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\psi = 0$$

$$V = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-\frac{1}{2}k\ x^2\right]\psi=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(\frac{2m\ E}{\hbar^2}-\frac{m\ k}{\hbar^2}x^2\right)\psi=0$$

لقد وجد من حل المعادلة الأخيرة، أن القيم الممكنة للطاقة هي كالاتي:-

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\,\gamma$$ ((مهمة))

حيث أن $n=0,1,2,3....$

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

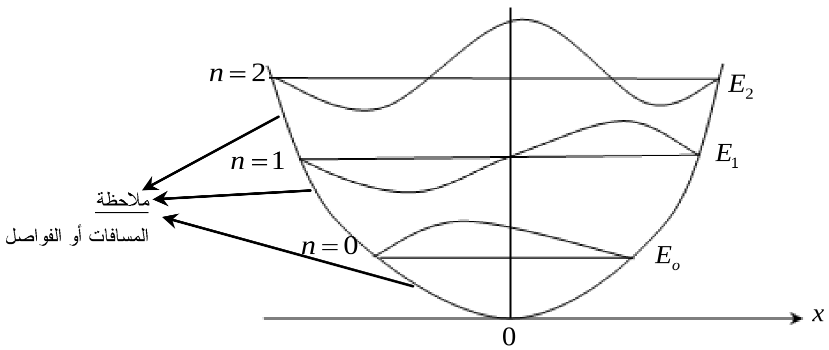
$\omega=2\pi\ \gamma$ التردد الزاوي

ويلاحظ مايلي:-

a- أن مستويات طاقة المتذبذب تكون مكممة (منفصلة) بفواصل تساوي ($h\,\gamma$) وبقيم ثابتة (وهو عكس ما تم ملاحظته في الجسيم محصور في صندوق) حيث أن الفواصل غير ثابتة.

b- أن أقل قيمة للطاقة هي $E=\frac{1}{2}h\,\gamma$ وتدعى بطاقة الصفر المطلق.

** ويمكن ملاحظة المستويات بالشكل التالي:-



الشكل يوضح تكمم مستويات الطاقة لمتذبذب توافقي بسيط.

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\,\gamma$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots$

ومن الملاحظ:-

a- أن $E_o=\frac{1}{2}h\,\gamma$ عند ($n=0$).

b- وأن الفواصل متساوية وبقيم ثابتة عكس ما هو عليه في حالة الجسيم محصور في صندوق جهدي بسبب

$$E_n=\frac{\pi^2\ \hbar^2}{2m\ L^2}\times(n)^2$$

$n=1,\ 2,3,\ \ldots\ldots\ldots$

مثال/ أحسب مقدار طاقة الصفر والطاقة التالية لطاقة الصفر لمنظومة تتكون من جسيم كتلته (*1mg*) مربوط إلى نابض حلزوني مشدود إلى نقطة ثانية. وقد تم سحب النابض سنتمتر واحداً بقوة مقدارها (*10kg*).
كذلك أحسب العدد الكمي للمنظومة في درجة حرارة الغرفة حيث تكون مقدار الطاقة ممثلة بـ (K.T) و K = ثابت بولترمان.

$$F = -K\ x \Rightarrow K = \frac{F}{x}$$

$$K = \frac{m \times g}{x} = \frac{10\ kg \times 9.8\ N.kg}{1 \times 10^{-2} m}$$

$K = 9800\ N/m$ ثابت القوة

$$\gamma_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9800}{1 \times 10^{-6} kg}}$$

$$\gamma_o = 15755.5\ \sec^{-1}$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\ \gamma_o \quad at \quad (n = 0)$$

$$E = \frac{1}{2} \times 6.63 \times 10^{-34} \times 15755.7$$

$$E 5.22 \times 10^{-30} J \quad at \quad (n = 1)$$

$$E = \left(1 + \frac{1}{2}\right) h\ \gamma_o \Rightarrow E = 1.56 \times 10^{-29} J$$

درجة حرارة بالكلفن $T = 27\ ^oC + 273 = 300 K^o$ درجة الحرارة، ($27\ ^oC$) درجة حرارة الغرفة.

$E = K\ \Gamma$ الطاقة الحرارية

$$= 1.38 \times 10^{-23} J.K^{o^{-1}} \times 300k$$

$$E = 4.14 \times 10^{-21} J$$

العدد الكمي الذي عنده تكون الطاقة الحرارية مساوية للطاقة الاهتزازية $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\ \gamma_o$

$$E = n\ h\ \gamma_o + \frac{h\ \gamma_o}{2}$$

$$\left[E - \frac{h\ \gamma_o}{2} = n\ h\ \gamma_o\right] h\ \gamma_o$$

$$\frac{E}{h\ \gamma_o} - \frac{1}{2} = n$$

$$\therefore n = \frac{E}{h\ \gamma_o} - \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{4.14 \times 10^{-21}}{6.63 \times 10^{-34} \times 15755.5} - 0.5$$

$$n = 3.9 \times 10^8$$

$n \cong 4 \times 10^8$ العدد الكمي