Some of probability distribution

بعض التوزيعات الاحتمالية.

اولاً: التوزيع الثنائي : Binomial Distribution

لنفرض ان تجربة « experiment » ما كررت n من المرات وان هذه التجربة تتصف بما يلي:

① ان فضاء العينة S لهذه التجربة يتكون من حادثتين ابتدائيتين فقط ونرمز لهما A, B وعادة ما يسمى الحادثة $[A]$ بالحادثة الناجحة او المحاولة الناجحة ، $[B]$ بالحادثة الفاشلة او فشل المحاولة.

② ان احتمالية وقوع الحادثة $[A]$ في كل محاولة ثابتة.

③ ان المحاولات n مستقلة بعضها عن البعض الآخر.

فإذا كانت التجربة تتصف بالصفات المذكوره اعلاه ورمزنا بالرمز p لاحتمالية وقوع الحادثة الناجحة $[A]$ وبالرمز q لاحتمالية وقوع الحادثة الفاشلة فانه: $q = 1 - p$

وعليه فان احتمالية الحادثة التي تقع x من المرات الناجحة في n من المحاولات يمكن ايجادها بالقانون.

$$① \quad f(x) = p(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases}$$

الرمز $\binom{n}{x}$ عندما n, x اعداد صحيحة موجبة مع ان $x \le n$ ، تعرف كالآتي

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (r-1)r} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ex1- $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28$, $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$

ex. 2. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\, n!} = 1$, $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$ حيث ان $0! = 1$

نعود الى المعادلة (1) نجد ان التوزيع المذكور في معادلة (1) يسمى بالتوزيع الثنائي ، ومن التجارب التي تتبع التوزيع الثنائي تجربة رمي قطعة نقود وتجربة رمي الهدف معين وتجربة رمي زهر النرد وتجربة انتاج معمل وتصنيف البضائع .

مثال 1: يمكن ان نرمز كذلك للتوزيع الثنائي

التوزيع الثنائي $b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

A fair coin is tossed 6 times or, equivalently, six fair coins are tossed; call heads a success. Then $n=6$ and $p=q=\frac{1}{2}$

i) The probability that exactly two heads occur (i.e. $k=2$) is $b(2;6,\frac{1}{2}) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$= \frac{15}{64}$$

ii) The prob. of getting at least four heads (i.e. $k=4, 5$ or 6) is

$b(4;6,\frac{1}{2}) + b(5;6,\frac{1}{2}) + b(6;6,\frac{1}{2}) = \cdots = \frac{11}{32}$

iii) The prob. of no heads (i.e. all failures) is $q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ and so the prob. of at least one head is $1-q^6 = 1-\frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

$b(1;6,\frac{1}{2}) + b(2;6,\frac{1}{2}) + b(3;6,\frac{1}{2}) + b(4;6,\frac{1}{2}) + b(5;6,\frac{1}{2}) + b(6;6,\frac{1}{2})$

مثال 2: نختبر فيه ستة اشخاص ، جد احتمالية وجود :-

(1) ثلاث رجال وثلاث نساء

(2) عدد الرجال اقل من عدد النساء

مع العلم ان احتمال وجود الرجال $= \frac{1}{2}$ كما ان احتمال وجود النساء $= \frac{1}{2}$

الحل: نستخدم القانون (1) وحيث $n=6$ ، $p=q=\frac{1}{2}$

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

31

① نفرض ان $X=3$ تمثل عدد الرجال.

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$

② وجود عدد الرجال اقل من النساء تعني ان عدد الرجال يكون اما 0 ، 1 او 2 وعليه يكون

$$P=P(0m)+P(1m)+P(2m)$$

حيث m تعني Men

$$P=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$=\frac{11}{32}$$

$$b(0;6,\tfrac{1}{2})+b(1;6,\tfrac{1}{2})+b(2;6,\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$$

ثانياً: توزيع بواسان : Poisson Distribution

افترضنا في التوزيع الثنائي ان p كمية ثابتة. فإذا كانت p كمية تتغير وكان حاصل ضرب pn يساوي كمية ثابتة ولتكن m فانه كلما كانت p صغيرة « تقترب » من الصفر وتكون n كبيرة جداً وفي هذه الحالة تكون الغاية للتوزيع الثنائي عندما n « تقترب من اللانهاية » وفي هذه الحالة توزيع آخر باسم توزيع بواسان ويتعين بالشكل التالي.

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-m} m^{x}}{x!} & ; x=0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{للقيم الاخرى} \end{cases}$$

حيث ان e هو الاساس الطبيعي للوغارتم ويساوي 2.718 ، m تساوي كمية ثابتة (parameter) ويستخدم هذا التوزيع في الحالات التالية :

1) الشذوذات الحاصلة عند الولادات 2) سيارات الاجرة والطلبات عليها

3) الحوادث في المعامل والمصانع التي تحدث عن طريق الصدفة

4) جميع الحالات التي نستخدم فيها التوزيع الثنائي عندما n تكون كبيرة اي اكبر من 30 ، p صغيرة وهناك حالات كثيرة اخرى.

تطبيقات على استخدام قانون بواسون .

مثال ١: افرض ان 2% من انتاج معمل معيب ، جد احتمالية وجود 3 حاجات معيبة في عينة متكونة من 100 حاجة لهذا المعمل ؟

الحل:

$$m = np$$

$$\therefore m = 100 \times \frac{2}{100} = 2$$

$$\therefore P(X=x) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-2} \times 2^{3}}{3!}$$

$$= \frac{8(0.135)}{6}$$

$$= 0.180$$

مثال ٢: استعمل تقريب بواسون لحساب احتمالية كون ما لا يزيد عن شخصين يملكون اجازة سياقة من مجموع 50 شخصاً اذا كان من الطبيعي ان 5% من الناس يملكون ذلك ؟

الحل:

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{e^{-m} m^{x}}{x!} & , x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{للقيم الاخرى} \end{cases}$$

في هذا السؤال نحتاج لتحديد قيمة m وعليه فانه

$$m = np$$

$$= 50 \times \frac{5}{100} = 2.5$$

$$\therefore P(X \le x) = \sum f(x)$$

$$\therefore P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-2.5} (2.5)^{x}}{x!}$$

$$= e^{-2.5} \left[\frac{(2.5)^{0}}{0!} + \frac{(2.5)^{1}}{1!} + \frac{(2.5)^{2}}{2!} \right] = 6.626 e^{-2.5}$$