Now if X is arandom variable with the distribution f and it satisfies conditions ① and ②, then the mean or expectation (or: expacted value) of X, denoted by E(X) or μ_X, or simply E or μ, is defined by

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$\therefore E(X) = \sum x_i f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.47$$

Now let Y assign to each point (a,b) in S the sum of its numbers, i.e. $Y(a,b) = a+b$. Then Y is also a random variable on S with image set

$$Y(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

The distribution g of Y follows:-

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

we obtain, for example $g(4) = \frac{3}{36}$ from the fact that (1,3), (2,2) and (3,1) are these points of S for which the sum of the components is 4; hence

$$g(4) = P(Y=4) = P(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

The mean of Y is computed as follows:

$$E(Y) = \sum y_i g(y_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= 7$$

Ex. A coin weighted so that $P(H) = \frac{2}{3}$ and $P(T) = \frac{1}{3}$ is tossed three times. The probabilities of the points in the sample space $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ are as follows:

$P(HHH) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, $P(THH) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

$P(HHT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, $P(THT) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P(HTH) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$, $P(TTH) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

$P(HTT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$, $P(TTT) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Let X be the random variable ~~with~~ which assigns to each point in S the largest number of successive heads which occurs. Thus,

$X(TTT) = 0$

$X(HTH) = 1$, $X(HTT) = 1$, $X(THT) = 1$, $X(TTH) = 1$

$X(THH) = 2$

$X(HHT) = 2$,

$X(HHH) = 3$

The image set of X is $X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$, we compute the distribution f of X:

$f(0) = P(TTT) = \frac{1}{27}$

$f(1) = P(\{HTH, HTT, THT, TTH\}) = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{10}{27}$

$f(2) = P(\{HHT, THH\}) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$

$f(3) = P(HHH) = \frac{8}{27}$

the table is

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

the mean of X

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{10}{27} + 2 \cdot \frac{8}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27}$$

$$= \frac{50}{27} = 1.85$$

Theorem 1: Let X be a random variable and K a real number.
Then i) $E(KX) = KE(X)$ and
ii) $E(X+K) = E(X) + K$

Theorem 2: Let X and Y be random variables on the same sample space S. Then $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Corollary: Let $X_1, X_2, ---, X_n$ be random variables on S.
Then $E(X_1 + --- + X_n) = E(X_1) + --- + E(X_n)$

دالة التوزيع Distribution function

اذا كان X متغير عشوائي ، فان دالة التوزيع F للمتغير العشوائي X تعرف بالصيغة التالية :

$$F(x) = P\{X \leq x\} \quad \forall x \in R$$

" $\forall x \in R$ تعني لكل عدد حقيقي x "

وعليه فان دالة التوزيع هي احتمالية حادثة معينة لذلك فان
$0 \leq F(x) \leq 1$ لكل عدد حقيقي x .

مثال: عند رمي عملة واحدة ثلاث مرات ، في هذه الحالة فان فضاء العينة S يتكون من ثمان حوادث ابتدائية

$$S = \{(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)\}$$

ليكن x يمثل عدد الصور التي تظهر بالرميات الثلاثة للعملة .

$X(HTT) = 1$ ، $X(HTH) = 2$, $X(HHT) = 2$, ---
$X(HHH) = 3$, $X(TTT) = 0$

افرض ان $X<0$ ولنقل $X = -2.7$ فان $[X \leq x] = \phi$

$\therefore$ $P[X \leq x] = 0$

اذا كانت $0 \leq X < 1$ ، نقل $X = 0.5$ فان

$P[X \leq x] = \frac{1}{8}$ ، $[X \leq x] = [(TTT)]$

اما اذا كانت $1 \leq X < 2$ فان

$$[X \leq x] = [(TTT), (HTT), (THT), (TTH)]$$

$$p[X \leq x] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

اذا كانت $2 \leq X < 3$ فان

$$[X \leq x] = [(HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)]$$

$$p[X \leq x] = \frac{7}{8}$$

اخيراً اذا كانت $x \geq 3$ فان $[X \leq x] = S$ ،

$$p[X \leq x] = 1 \quad i.e.\ p(S) = 1$$

وعليه فان دالة التوزيع هي .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{if} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{if} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{if} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Some of probability distribution

بعض التوزيعات الاحتمالية .

Binomial Distribution : اولاً : التوزيع الثنائي

لنفرض ان تجربة « experiment » ما كررت n من المرات وان هذه التجربة تتصف بما يلي :

① ان فضاء العينة S لهذه التجربة يتكون من حادثتين ابتدائيتين فقط ولنرمز لهما A, B وعادة ما يسمى الحادثة $[A]$ بالحادثة الناجحة او المحاولة الناجحة ، $[B]$ بالحادثة الفاشلة او فشل المحاولة .

② ان احتمالية وقوع الحادثة $[A]$ في كل محاولة ثابتة .

③ ان المحاولات n مستقلة بعضها عن البعض الآخر .

فإذا كانت التجربة تتصف بالصفات المذكوره اعلاه ورمزنا بالرمز p لاحتمالية وقوع الحادثة الناجحة $[A]$ وبالرمز q لاحتمالية وقوع الحادثة الفاشلة فانه . $q = 1-p$

وعليه فان احتمالية الحادثة التي تقع x من المرات الناجحة في n من المحاولات يمكن ايجادها بالقانون .

$$① \quad f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{للقيم الأخرى} \end{cases}$$

الرمز $\binom{n}{x}$ عندما n, x اعداد صحيحة موجبة مع ان $x \le n$ ، تعرف كالآتي

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ex1- $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28$, $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$

ex. 2- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$, $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$ حيث ان $0! = 1$

نعود الى المعادلة (1) نجد ان التوزيع المذكور في معادلة (1) يسمى بالتوزيع الثنائي ، ومن التجارب التي تتبع التوزيع الثنائي تجربة رمي قطعة نقود وتجربة رمي الهدف معين وتجربة رمي زهر النرد وتجربة انتاج معمل وتصنيف البضائع .

مثال 1: يمكن ان نرمز كذلك للتوزيع الثنائي

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

A fair coin is tossed 6 times or, equivalently, six fair coins are tossed; call heads a success. Then $n=6$ and $p=q=\frac{1}{2}$

i) The probability that exactly two heads occur (i.e. $k=2$) is $b(2; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$= \frac{15}{64}$$

ii) The prob. of getting at least four heads (i.e. $k=4, 5$ or 6) is

$$b(4; 6, \tfrac{1}{2}) + b(5; 6, \tfrac{1}{2}) + b(6; 6, \tfrac{1}{2}) = \cdots = \frac{11}{32}$$

iii) The prob. of no heads (i.e. all failures) is $q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ and so the prob. of at least one head is $1 - q^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

مثال 2: نختبر فيه ستة اشخاص ، جد احتمالية وجود :-

1. ثلاث رجال وثلاث نساء
2. عدد الرجال اقل من عدد النساء

مع العلم ان احتمال وجود الرجال $= \frac{1}{2}$ كما ان احتمال وجود النساء $= \frac{1}{2}$

الحل: نستخدم القانون (1) وحيث $n=6$ ، $p=q=\frac{1}{2}$

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(1) نفرض ان $X=3$ تمثل عدد الرجال.

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6-3}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$

(2) وجود عدد الرجال اقل من النساء تعني ان عدد الرجال يكون
اما 0 ، 1 او 2 وعليه يكون

$$P = P(0m) + P(1m) + P(2m)$$

حيث m تعني Men

$$P = \binom{6}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{11}{12}$$