Independence

Ex-2: Let A = event that a family has children of both sexes, and let B = event that family has at most one boy.

i) show that A and B are independent events if a family has three children.

ii) show that A and B are dependent events if a family has two children.

Answer

i) نلاحظ انه يكون للعائلة ثلاث اطفال.
ولغرض تحديد independent events علينا تحديد فضاء العينة
اي sample space

$$S = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}$$

حيث ان g الحرف الاول من كلمة girl و b الحرف الاول من كلمة boy.

$$A = \{bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\}$$

and so $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$B = \{bgg, gbg, ggb, ggg\}$ and so $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{bgg, gbg, ggb\}$ and so $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

since $P(A)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B) \Rightarrow$ A and B are independent.

ii) here $S = \{bb, bg, gb, gg\}$

$A = \{bg, gb\}$ and so $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$B = \{bg, gb, gg\}$ and so $P(B) = \frac{3}{4}$

$A \cap B = \{bg, gb\}$ and so $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

since $P(A)P(B) \neq P(A \cap B) \Rightarrow$ A and B are dependent events.

Introduction:

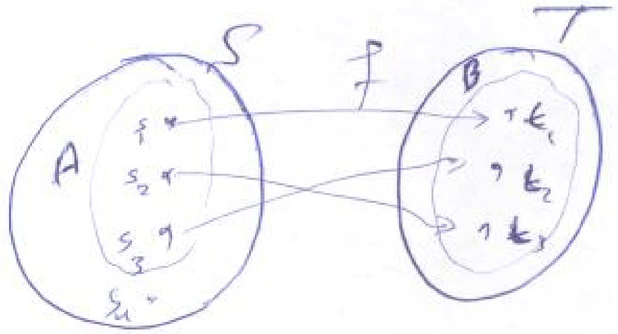
مقدمة

لغرض التذكير بمبدأ الدالة function

Let S and T be arbitrary sets. Suppose to each $s \in S$ there is assigned a unique element of T; the collection f of such assignments is called a function (or mapping or map) from S into T, and written $f: S \to T$.
We write $f(s)$ for the element of T that f assigns to $s \in S$, and call it the image of s under f or the value of f at s.
The image $f(A)$ of any subset A of S, and the preimage $f^{-1}(B)$ of any subset B of T are defined by

$$f(A) = \{ f(s) : s \in A \} \text{ and}$$

$$f^{-1}(B) = \{ s : f(s) \in B \}$$



Probability Distribution التوزيعات الاحتمالية

في كثير من الاحيان يكون من الصعب حساب احتمال وقوع الحادثة عندما يكون فضاء العينة عدداً كبيراً ، او ان كتابة عناصر فضاء العينة تتطلب جهداً ووقتاً ليس بالقليل ففي هذه الحالة نستخدم بعض القوانين التي تسمى بالتوزيعات الاحتمالية ، وهذه التوزيعات كثيرة ومتنوعة تعتمد على التجربة (الاختبار) وبالتالي على فضاء العينة ولكن قبل الدخول يجب علينا معرفة كل المتغير العشوائي ، دالة احتمالية الكثافة ودالة التوزيع ثم نعطي اهم التوزيعات الاحتمالية مثل التوزيع الثنائي وتوزيع بوسون والتوزيع الطبيعي (المعتدل).

Definition: A random variable X on a sample space S from ~~which~~ S into the set $\mathbb{R}$ of real numbers such that the preimage of every interval of $\mathbb{R}$ is an event of S.

If X and Y are random variables on the same sample space S, then $X+Y$, $X+k$, kX and XY are the function on S (where k is a real number) defined by

$$(X+Y)(s) = X(s) + Y(s) \quad , \quad (kX)(s) = kX(s)$$

$$(X+k)(s) = X(s) + k \qquad (XY)(s) = X(s)\,Y(s)$$

for every $s \in S$.

we use short notation $P(X=a)$ and $P(a \le X \le b)$ for the probability of the events (X maps into a) and "X maps into the interval $[a,b]$." that is

$$P(X=a) = P(\{s \in S : X(s) = a\})$$

and $$P(a \le X \le b) = P(\{s \in S : a \le X(s) \le b\})$$

مثال: نفرض ان $S = \{H, T\}$ فضاء العينة في رمي عملة واحدة مرة واحدة، نفرض المتغير العشوائي X في هذه الحالة يمثل "عدد الصورة في الرمية" فان X دالة منطلقها S وتمثل بواسطة

$$X(T) = 0, \quad X(H) = 1$$

اي ان لكل عدد حقيقي x فان المجموعة

$$\{\text{لكل حادث ابتدائي } w \quad X(w) \le x\} \text{ تكون حادثة}$$

$$[X(w) \le x] = \begin{cases} \phi & \text{if } x < 0 \\ [T] & \text{if } 0 \le x < 1 \\ [H, T] & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

وبما ان كلا من ϕ ، $[T]$ ، S حوادث فان X متغير عشوائي.

دالة الاحتمالية الكثافة

Probability density function

لتكن X متغيراً عشوائياً وان $S = [w_1, w_2, \dots, w_N]$ فضاء العينة لتجربة معينة

وان $X(w_i) = x_i$ حيث ان x_i عدد حقيقي

ولنكتب

$$X(S) = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

نسمي الدالة f دالة الاحتمالية الكثافة للمتغير العشوائي X اذا كانت

$$f(X = x_i) = f(x_i) \text{ من بديهيات الاحتمالية}$$

ولذلك نرى ان الدالة f يجب ان تحقق مايلي

(1) $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x الحقيقية

(2) $\sum_{x} f(x_i) = 1$ (رمز المجموع Summation)

مثال: لو ألقي زهري النرد مرة واحدة، نحصل على فضاء العينة المحدود

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\}$$

لتكن الدالة X ممثلة بالصيغة التالية

$$X(a,b) = \max(a,b)$$

$$a, b = 1, 2, \ldots, 6 \qquad \text{حيث ان}$$

لتكن دالة احتمالية الكثافة للمتغير العشوائي هي $f(X)$ فان

$$f(1) = f(X=1) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = f(X=2) = P\{(2,1), (2,2), (1,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$f(3) = f(X=3) = P\{(3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3)\} = \frac{5}{36}$$

$$f(4) = f(X=4) = P\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (3,4), (2,4), (1,4)\} = \frac{7}{36}$$

وبنفس الاسلوب نجد ان

$$f(5) = \frac{9}{36}$$

$$f(6) = \frac{11}{36}$$

يمكن وضع هذه المعلومات بجدول كالآتي.

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

كذلك نلاحظ ان هذه الدالة تحقق شرطي دالة احتمالية الكثافة وهي.

① $f(x_i) \geq 0$

② $\sum f(x_i) = 1$

The Logarithm Function:-

If b and N are any numbers, with $b>0$, $b\neq 1$, it is assumed that the equation

$$b^y = N$$

may alaways be solved uniquely for y. The value of y which solves This equation is written as

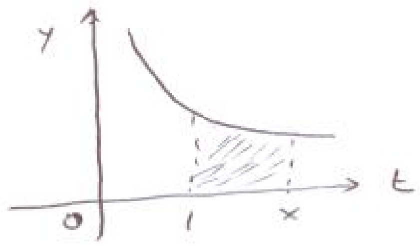
$$\log_b N$$

The usual laws of logarithms, such as

$$\log_b M + \log_b N = \log_b (MN)$$

$$\log_b M - \log_b N = \log_b \left(\frac{M}{N}\right)$$

The formula $\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \ , \ n \neq -1$



Definition: for values of $x>0$, we define

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

read "ell-en of x".

Theorem: If a and b are any positive numbers, then

i) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

ii) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

iii) $\ln(1) = 0$

iv) $\ln a^r = r \ln a$, if r is any rational number.

Theorem:- If $f(x) = \ln x$ then

i) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

ii) f is increasing.

iii) $\frac{1}{2} \le \ln 2 \le 1$

iv) $\ln x \to +\infty$ as $x \to +\infty$

v) $\ln x \to -\infty$ as $x \to 0$

vi) The range of f consists of all real numbers.

Ex.1: Given that $\ln 2 = 0.69315$ and $\ln 3 = 1.09861$ find

$\ln 24$, $\ln 0.1875$

Ex 2: Given that $F(x) = \ln(x^2+5)$, find $F'(x)$

Ex-3: Given that $G(x) = \ln\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, $-1<x<1$

find $G'(x)$

Exercises:- In the following problems compute the required quantities, when $\ln 2 = 0.69315$
$\ln 3 = 1.09861$ and $\ln 10 = 2.30259$

(1) $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 6$, $\ln 8$, $\ln 9$

(2) $\ln 25$, $\ln 27$, $\ln 32$

(3) $\ln\sqrt[3]{270}$, $\ln\sqrt{2/3}$, $\ln\sqrt[4]{7.2}$

In the following problems perform the differentiations.

(1) $f(x) = \ln(2x+1)$, (2) $f(x) = \ln x^4$

(3) $g(x) = 2\ln\sin x$, (4) $G(x) = (\ln x)^4$

(5) $F(x) = x\ln x$, (6) $H(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$

(7) $G(x) = \ln(\ln x)$, $x>1$

(8) $f(x) = (\ln x)^2/(1+x^2)$

The Exponential Function:

Definition: The exponential function denoted by exp, is defined to be the inverse of the function Ln.

Theorem: If $f(x) = \exp(x)$, then

i) f is increasing for all values of x,

ii) $\exp(x_1 + x_2) = (\exp x_1) \cdot (\exp x_2)$

iii) $\exp(x_1 - x_2) = (\exp x_1) / \exp x_2$

iv) $\exp rx = (\exp x)^r$, if r is rational

v) $f(x) \to +\infty$ as $x \to +\infty$

vi) $f(x) \to 0$ as $x \to -\infty$

If a is any positive number and r is any rational number, The formula

$$\exp(\ln x) = x$$

becomes

$$\exp(\ln a^r) = a^r$$

for $x = a^r$,

OR if $a > 0$, we define

$$a^r = \exp(x \ln a), \text{ for any } x$$

theorem if $x > 0$ then $\ln x = \log_e x$

$e = \exp 1$, we have $\ln e = \ln e^1 = \ln \exp 1$

OR $\ln e = 1$

Theorem: If $f(x) = e^x$ then $f'(x) = e^x$

Theorem: if $f(x) = a^x$ then $f'(x) = a^x \log_e a$

تمارين

We summarize the formulas as:

$$\ln u = \log_e u, \quad \exp u = e^u, \quad a^u = e^{u\ln a}$$

$$d\ln u = \frac{du}{u}, \quad d\log_a u = \frac{du}{u\ln a}$$

$$de^u = e^u\,du, \quad d\,a^u = a^u \ln a\,du$$

Ex-1: Given that $f(x) = \ln|\sin x|$ find $f'(x)$

Ex-2: Given that $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, find $f'(x)$

<u>Exercises</u>:

Ex 3: $f(x) = \left| \dfrac{x^2\sqrt[3]{3x+2}}{(2x-3)^3} \right|, \; x \neq \dfrac{3}{2}$

Ex 4: $f(x) = x^x$ find $f'(x)$

Preform the differentiations:-

① $f(x) = e^{\sin x}$ ② $G(x) = e^{2x}\ln x$

③ $H(x) = (\ln x)^x$ ④ $f(x) = \left| x\sqrt{2x-1}\,\sqrt[3]{3x+3} \right|$

Ex. Find $\dfrac{dy}{dx}$, when $y = a^{x^2}$

<u>Answer</u>: let $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$y = a^u \Rightarrow \frac{dy}{du} = a^u \ln a$$

$$\therefore dy = a^u \ln a\,du$$

اذاً نعوض عن $u = x^2$ ينتج ان

$$dy = a^{x^2} \ln a \cdot 2x\,dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x\,a^{x^2} \ln a$$