Answer 6)

i) لكي نعين ضمنياً الحدث A، B و C فان

$A = \{H2, H4, H6\} \subset S$

كذلك بالنسبة الى B نختار من كل ظهور الاعداد الاولية لذا فان

$B = \{H2, H3, H5, T2, T3, T5\}$

وايضاً فان C بنفس الاسلوب تكون

$C = \{T1, T3, T5\}$

ii) مطلوب منه ان نعين ضمنياً الحدث

a) بان تحصل A or B فحينه تكون

$A \cup B = \{H2, H3, H4, H6, T2, T3, T5\}$

b) $B \cap C = \{T3, T5\}$

c) لكي نختار العناصر للمجموعة B والتي غير موجودة في A او C لذا فان

$$B \cap A^c \cap C^c = \{H2, H3, H5, T2, T3, T5\} \cap \{H1, H3, H5, T1, T2, T3, T4, T5, T6\} \cap \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T2, T4, T6\}$$

$= \{H3, H5, T2\}$ العناصر المشتركة فقط

iii) المطلوب معرفة اي من الحدث A, B, C هي mutually exclusive اي تقاطعهم $= \phi$

$A \cap C = \phi$

$\therefore$ A, C هي mutually exclusive

7) Let $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, and let P be the probability function on S.

i) Find $P(a_1)$ if $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$

ii) Find $P(a_1)$ and $P(a_2)$ if $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$ and $P(a_1) = 2P(a_2)$.

iii) Find $P(a_1)$ if $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$,
$P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{2}$ and $P(a_2) = \frac{1}{3}$.

The solution

i) من خلال شروط الاحتماليه فان

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$$

وعليه نعوض عن القيم المعطاة بما يساويها في الطرف الأول، يكون

$$P(a_1) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$P(a_1) = 1 - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right\} = \frac{7}{18}$$

ii) let $P(a_2) = x \Rightarrow P(a_1) = 2x$,

أيضاً من خلال التعريف لشروط الاحتماليه فإن مجموع احتماليات (sample points) يجب ان يساوي واحد.

لذلك فان $P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$

وعليه $2x + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$$\therefore 3x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

لذلك يكون $P(a_2) = \frac{1}{6}$

$$P(a_1) = \frac{1}{3}$$

iii) $P(\{a_2 + a_3\}) = P(a_2) + P(a_3)$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(a_3) \Rightarrow P(a_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(a_4) = P(\{a_2, a_4\}) - P(a_2) \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(a_1) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$P(a_1) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

8) صندوق فيه 20 كرة متشابهة مكتوب على كل منها احد الاعداد من 1 الى 20 فاذا سحبنا كرة بصورة عشوائية من الصندوق فما هي احتمالية ان يكون العدد الذي عليها يقبل القسمة على (3) او فردي ؟

الجواب او الحل :-

Let A be the event represent the number divides 3, so

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

let event B contains odd numbers,

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

since the two events not disjoint

$A \cap B = \{3, 9, 15\} \neq \phi$

so $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$

$P(B) = \frac{10}{20}$

$P(A) = \frac{6}{20}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{6}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$

Problems:-

① A coin is weighted so that heads is twice as likely to appear as tails. Find $P(T)$ and $P(H)$.

②. Two men, m_1 and m_2, and three women, w_1, w_2 and w_3, are in a chess tournament. (مباراة شطرنج) Those of the same sex have equal probabilities of winning, but each man is twice as likely to win as any woman.

i) Find the probability that a woman wins the tournament.

ii) If m1 and w1 are married, find the probability that one of them wins the tournament.

3. لو القي زهر النرد مرتين فما احتمالية حصولنا على مجموع الوجهين يساوي 8 ؟

$$S = \{(x,y) \mid (x,y) = (1,1), (1,2), \dots, (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), \dots, (2,6) \dots (6,6)\}$$

ملاحظة : اذا كان فضاء العينة يحتوي على (N) من العناصر فان عدد الحوادث يساوي 2^N

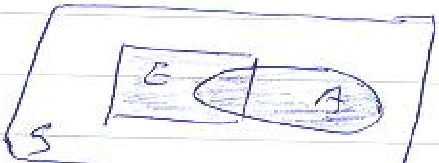
Conditional Probability and Independence :-

Conditional probability: الاحتمال الشرطي

Let E be an arbitrary event in a sample space S with $p(E) > 0$, the conditional probability of A given E, written $p(A|E)$, is defined

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)}$$

or $p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}$



$|E|$ denotes the number of elements in an event E.

Ex.1 Let a pair of fair dice be tossed. If the sum is 6, find the probability that one of the dice is a 2. In other words, if

$$E = \{\text{sum is } 6\} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

and

$$A = \{\text{a 2 appears on at least one die}\}$$

Find $p(A|E)$.

solution: Now E consists of five elements and two of them, $(2,4)$ and $(4,2)$, belong to A.

$A \cap E = \{(2,4), (4,2)\}$, then $p(A|E) = \frac{2}{5}$

Multiplication Law قانون الضرب

$$P(A) = P(A|K_1)P(K_1) + P(A|K_2)P(K_2) + P(A|K_3)P(K_3)$$

والمثال التالي لتوضيح القانون اعلاه.

لتكن لدينا ثلاثة اكياس متشابهة يحتوي الاول منها على 3 كرات خضراء، 4 كرات حمراء، 5 كرات صفراء.
ويحتوي الثاني على 5 كرات خضراء، 10 كرات حمراء، 5 كرات صفراء
ويحتوي الثالث على 3 كرات خضراء، 2 حمراء، وواحده صفراء.
سحبنا بطريقة عشوائية كيساً من هذه الاكياس (دون رؤيته) ثم سحبنا من هذا الكيس مره واحدة.
المطلوب حساب احتمالية كون الكره المسحوبة خضراء.

الحل: ليكن A الحادث (الكره المسحوبة خضراء)
K_1 (الحادث الكيس المسحوب هو الاول).
K_2 (الكيس المسحوب هو الثاني).
K_3 (الكيس المسحوب هو الثالث)

$$P(A|K_1) = \frac{3}{3+4+5} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|K_2) = \frac{5}{5+10+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|K_3) = \frac{3}{3+2+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Independent Events — الحوادث المستقلة

يقال للمجموعة من الحوادث انها مستقلة (independent) اذا كان وقوع احدها او عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع اي من باقي الحوادث.

يقال على سبيل المثال ان الحادثين A ، B مستقلان اذا كان وقوع A لا يؤثر في وقوع B وبالعكس.

اي ان $P(A|B) = P(A)$ اذا كانت A ، B حادثين مستقلين.

OR: Events A and B are independent if $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ otherwise they are dependent.

مثال: اذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4\}$

كان الاحتمالية لكل عنصر في المجموعة $= \frac{1}{4}$

فاذا كانت

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1\}$$

فان

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

لكن

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

∴ A ، B حادثان غير مستقلين.

اما اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 4\}$ فان

$P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

من هنا فان $P(B|A) = \frac{2}{3}$

$$P(B) = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}$$

∴ A ، B حادثتان غير مستقلين .

اما اذا كانت $A = \{1,2\}$ ، $B = \{2,3\}$ فان

$$P(A) = \frac{1}{2} , P(B) = \frac{1}{2} , P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

وعليه فان $P(B|A) = \frac{1}{2}$

$$= P(A)$$

OR $P(A|B) = P(B) = \frac{1}{2}$

∴ الحادثتان A ، B مستقلتان .